Sistemas de Control Borroso

Agustín Jiménez Avello

Control Inteligente

- Serie de técnicas, tomadas fundamentalmente de la inteligencia artificial, con las que se pretenden resolver problemas de control inabordables por los métodos clásicos.
  - Control Experto
  - **Control Borroso**
  - Redes Neuronales Artificiales
  - Algoritmos Genéticos
  - …

2

Control Borroso

- Una de las principales cualidades de los seres humanos es la de poder tomar decisiones ante situaciones con altos niveles de incertidumbre y en ocasiones pobremente definidas.
- El control borroso trata de implantar en el computador, intrínsecamente numérico, las estrategias de control de los operadores de proceso, expresadas normalmente en términos lingüísticos, y por tanto imprecisos.

3

Control Borroso

- El nexo de unión entre estos dos mundos, el impreciso y el numérico, se basa en la lógica borrosa.
- El objetivo de la lógica borrosa es el de la formalización del razonamiento con incertidumbre.
- Intenta abordar problemas definidos en términos lingüísticos, con datos expresados en términos cualitativos.

4

Sumario

- **Orígenes del pensamiento borroso**
- Lógica y lógicas
- Lógica borrosa
- Controladores PID borrosos
- Modelado Borroso
- Aplicación al control

5

ORIGENES DEL PENSAMIENTO BORROSO

- **Contraposición a la lógica clásica:**
  - cualquier enunciado o proposición puede tomar un valor lógico VERDADERO o FALSO

$$p \wedge \overline{p} \ \text{ es simpre falso}$$
$$p \vee \overline{p} \ \text{ es simpre verdadero}$$
$$(p \Rightarrow q) \wedge p \text{ por tanto } q$$
$$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q} \text{ por tanto } \overline{p}$$
$$\text{etc.}$$

6

ORIGENES DEL PENSAMIENTO BORROSO

- En lógica borrosa los valores lógicos son conjuntos borrosos
  - Lotfi Zadeh **(1965)** ***La Teoría de los Conjuntos Borrosos***
- Los valores lógicos se corresponden a términos lingüísticos como a medias, bastante, casi, poco, mucho, algo, etc.
- Permite plantear el problema en los mismos términos en los que lo haría un experto humano.

7

Conjuntos Borrosos

- En teoría clásica de conjuntos los elementos del dominio (universo) pertenecen, o no, a un determinado conjunto
- En conjuntos borrosos todos los elementos del dominio pertenecen a todos los conjuntos borrosos
  - Con un grado de pertenencia determinado por la función de pertenencia característica de cada conjunto
  - Entre 0 y 1

8

Conjuntos Borrosos

- Un *subconjunto borroso* A de un dominio X={x} es un conjunto de pares ordenados

  $A=\{(x\,;\mu_A(x))\ \forall\ x \in X\}$,

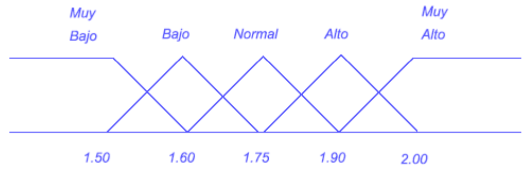
  donde

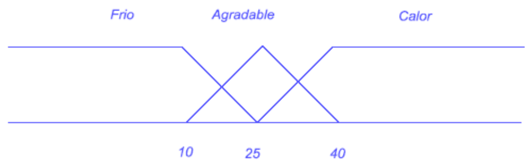
  $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$

  es la *función de pertenencia* característica de A
- No es probabilidad
- grado de compatibilidad de un cierto predicado
- grado de posibilidad de que éste sea cierto

9

Conjuntos Borrosos





10

Conjuntos Borrosos

- **operaciones básicas**

igualdad	$A = B \Leftrightarrow \forall x \in X\ \ \mu_A(x) = \mu_B(x)$
inclusión	$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X\ \ \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$
unión	$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_A(x))\ \forall x \in X$
intersección	$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_A(x))\ \forall x \in X$
complemento	$A = \overline{B} \Leftrightarrow \forall x \in X\ \ \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$

- **Se suelen definir otras operaciones de unión e intersección**
  - En vez de max suma acotada por la unidad
  - En vez de min también se utiliza producto
- **operaciones adicionales: producto, potenciación, distancia, etc.**

11

Conjuntos Borrosos

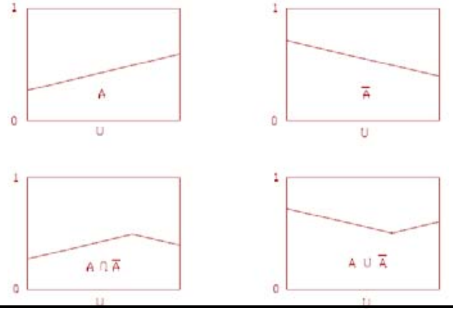
- **Los conjuntos clásicos** se pueden considerar un caso particular de los conjuntos borrosos, en los que la función de pertenencia toma exclusivamente valores 0 ó 1
- ***conjunto vacío*** Φ : será aquel cuya función de pertenencia sea constante e igual a cero
- ***conjunto completo*** (el dominio X) : el que tiene función de pertenencia constante e igual a uno.

12

Conjuntos Borrosos

- **la operación de complemento no da, en general, un conjunto disjunto ni complementario en el sentido clásico:**

$$A \cap \overline{A} \neq \Phi$$
$$A \cup \overline{A} \neq X$$



Sumario

- Orígenes del pensamiento borroso
- **Lógica y lógicas**
- Lógica borrosa
- Controladores PID borrosos
- Modelado Borroso
- Aplicación al control

LOGICA Y LOGICAS

- ***Ciencia que estudia las condiciones formales de validez de una inferencia y, en general, de una argumentación cualquiera***
- **SINTAXIS**
  - *variables*: enunciados elementales
  - *conectivas*: elementos que pueden unir a las variables
  - *sentencias*: enunciados compuestos de variables y conectivas
  - *axiomas*: sentencias básicas pertenecientes a la lógica que estemos definiendo
  - *reglas operativas*: permiten derivar una sentencia de otra
  - *teoremas*: sentencias que mediante *demostración*, esto es, aplicación consecutiva de reglas operativas, se pueden obtener a partir de los axiomas
  - *tesis*: sentencia que es o bien un axioma o bien un teorema

LOGICA Y LOGICAS

- **SEMANTICA**
  - *conjunto de valores semánticos*: posibles interpretaciones de una variable o de una sentencia, con un mínimo de dos elementos
  - *operaciones semánticas*: operaciones con los elementos de la lógica, de modo que a cada variable le corresponda un valor semántico y a cada conectiva una operación
  - *tautología*: cuando dentro del conjunto de valores semánticos está el valor '1' o 'verdadero',se define como tautología como aquella sentencia que para cualquier interpretación de sus variables la interpretación de la sentencia siempre es verdadera
  - *contradicción*: cuando la interpretación es siempre 'falsa'
- ***completa*: cuanto toda tautología es una tesis**
- ***consistente*: cuando toda tesis es una tautología**

LOGICA Y LOGICAS

- Lógicas
  - Clásicas
    - Proposiciones
    - Predicados
  - No clásicas
    - Ampliaciones
      - Predicados de orden superior
      - Predicados con identidad
      - Clases
      - Relaciones
      - Modal
      - Temporal
    - Multivaloradas
      - Valores finitos
      - Bayesiana
      - Borrosa

LOGICA DE PREDICADOS

- **Formaliza el concepto de propiedad ("Alberto es un ser vivo") y el de relación ("Juan vive en Madrid")**
- ***Variables*:**
  - Colectivos ("los peces", "los seres vivos"), con la notación usual x, y, z para los miembros genéricos del colectivo, denominadas *variables* propiamente dichas.
    - *universo del discurso (dominio)*: conjunto de posibles valores particulares que pueden tomar las variables
  - miembros("Juan", "Madrid"), con la notación usual a, b, c, denominadas *constantes*

LOGICA DE PREDICADOS

- ***conectivas*:**
  - las de la lógica de proposiciones
    - Negación, conjunción, disyunción
    - Condicional, bicondicional
  - propiedad: da lugar a un *predicado monádico*
    - "Alberto es un ser vivo": S(a)
  - relación: da lugar a un *predicado poliádico*
    - "Juan vive en Madrid": V(j,m)
  - *cuantificador universal* $\forall$
    - formaliza la idea de "para todo elemento ... se verifica ..."
  - *cuantificador existencial* $\exists$
    - formaliza la idea de "existe un elemento ... tal que ..."

LOGICA DE PREDICADOS

- Axiomas

$$(p \vee p) \Rightarrow p$$

$$q \Rightarrow (p \vee q)$$

$$(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left[(r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)\right]$$

$$\forall x\,(P(x)) \Rightarrow P(a)$$

$$\forall x\,(p \Rightarrow P(x)) \Rightarrow (p \Rightarrow \forall x\, P(x))$$

LOGICA DE PREDICADOS

- ***valores semánticos* : {verdadero,falso} o bien {1,0}**
- ***operaciones semánticas*:**
  - Álgebra de Boole
  - interpretación del cuantificador $\forall$

    $I(\forall\ x\ (P(x))) = I(P(a) \wedge\ P(b) \wedge\ P(c)\ ...)$
  - interpretación del cuantificador $\exists$

    $I(\exists\ x\ (P(x))) = I(P(a) \vee P(b) \vee P(c)\ ...)$
- **completa**
- **consistente**

Sumario

- Orígenes del pensamiento borroso
- Lógica y lógicas
- **Lógica borrosa**
- Controladores PID borrosos
- Modelado Borroso
- Aplicación al control

LOGICA BORROSA

- **SINTAXIS**
  - mismo aspecto sintáctico de la lógica de predicados (variables, constantes, conectivas y cuantificadores)
- **SEMÁNTICA**
  - basada en el concepto de borrosidad que se formaliza en la teoría de conjuntos borrosos

LOGICA BORROSA

- Semántica Borrosa
  - *valores semánticos*: subconjuntos borrosos, siendo necesario definir para cada predicado los correspondientes subconjuntos
  - *universo de discurso (dominio)*: conjunto de posibles valores particulares que pueden tomar las variables que intervienen en el predicado
  - *etiquetas lingüísticas* los valores semánticos correspondientes a un predicado (del orden de 5)
    - *granularidad* como la capacidad de discernir entre dos términos lingüísticos
  - *funciones de pertenencia* de un término lingüístico: cada término lingüístico corresponde a un subconjunto borroso que lleva asociada una función de pertenencia. Esta representa el grado de asociación de un valor numérico x con ese término.

LOGICA BORROSA

- ***operaciones semánticas*: **Dado que la interpretación de un predicado es un conjunto borroso, las operaciones semánticas para interpretar una sentencia serán las correspondientes a los conjuntos borrosos

$$I(\neg A) = \bar{I}(A)$$
$$I(A \wedge B) = I(A) \cap I(B)$$
$$I(A \vee B) = I(A) \cup I(B)$$

- tautologías de la lógica de proposiciones, como ¬A∨A, dejan de serlo en lógica borrosa
- **CONCLUSIÓN:**

  la lógica borrosa no será ni completa ni consistente.

Sumario

- Orígenes del pensamiento borroso
- Lógica y lógicas
- Lógica borrosa
- **Controladores PID borrosos**
- Modelado Borroso
- Aplicación al control

Controladores PID borrosos

- Equivalentes a los PID convencionales

$$u(t) = K_R\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right]$$

- En función de
  - e(t): variable de error
  - ce(t): función derivada o cambio en el error
  - se(t): función integral o suma del error
- Se obtiene
  - u(t): acción de control o bien
  - cu(t): cambio en la acción de control

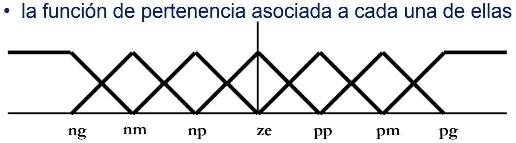
Controladores PID borrosos

- El conocimiento del experto se estructura en forma de reglas

  SI el error es positivo pequeño Y

  el cambio del error es positivo pequeño

  ENTONCES la acción de control es positiva grande
- Es preciso definir
  - el universo de discurso
  - las etiquetas lingüísticas
  - la función de pertenencia asociada a cada una de ellas



Controladores PID borrosos

- FP

  IF E = ... THEN U=...

- FPI

  IF E = ... AND SE=... THEN U=...

  IF E = ... AND CE = ... THEN CU=...

- FPD

  IF E = ... AND CE = ... THEN U=...

- FPID

  IF E = ... AND CE = ... AND SE=... THEN U=...

29

Controladores PID borrosos

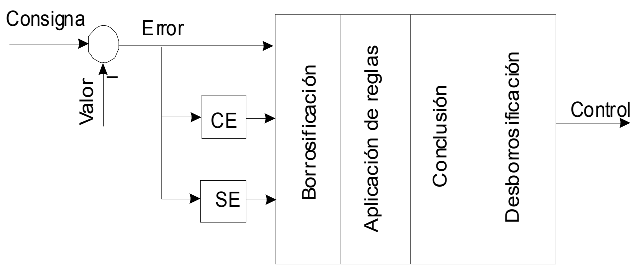
– Las variables físicas toman valores numéricos mientras que en las reglas toman valores borrosos: **BORROSIFICACIÓN**

– El resultado de la inferencia borrosa será un conjunto borroso, pero necesitamos un valor numérico de control: **DESBORROSIFICACIÓN**

30

Controladores PID borrosos

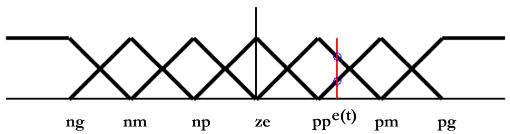
- Estructura



31

Controladores PID borrosos

- **Borrosificación (fuzzyfication)**
  – consiste en calcular el grado de pertenencia de las variables de entrada a cada una de las etiquetas lingüísticas mediante las funciones de pertenencia. Este será un número comprendido entre 0 y 1 para cada etiqueta.



32

Controladores PID borrosos

- **Forma de las funciones de pertenencia**
  - Trapezoidales
    - Pueden derivar en rectangulares o en triangulares
  - Rectangulares
    - Corresponden a los conjuntos clásicos
  - Exponenciales (distribución normal)
    - muestran un comportamiento muy adecuado y no presentan discontinuidad en la derivada, aunque tienen el inconveniente de su lentitud de cálculo
  - Polinómicas
    - son funciones sencillas de calcular y tienen una forma similar a la de las funciones de densidad normales, siendo más rápidas de calcular.

Controladores PID borrosos

- Planteamiento de las reglas (p.e. PI)
  - IF E = ZE AND CE = ZE THEN CU = ZE
  - IF E = PG AND CE = NP THEN CU = PP
  - ...
- Tabla de reglas

		CE				
		ng	np	ze	pp	pg
E	ng	ng	ng	ng	np	np
	np	ng	np	np	np	ze
	ze	np	np	ze	pp	pp
	pp	ze	pp	pp	pp	pg
	pg	pp	pp	pg	pg	pg

Controladores PID borrosos

- **Aplicación de las reglas**
  - Después de la borrosificación, para cada etiqueta lingüística tenemos un grado de pertenencia de E y otro de CE.
  - Al ser reglas del tipo

    IF E = .. AND CE = .. THEN ...

    el grado de cumplimiento de la premisa será el menor de cada una de sus condiciones (o el producto) y se toma este grado como peso en la conclusión final.

    $m_{ij} = \min(\mu_i(e(t)), \mu_j(ce(t)))$
  - Se pueden eliminar reglas con bajo peso

Controladores PID borrosos

- **Conclusión borrosa**.
  - La acción de control que concluye cada regla es una etiqueta lingüística de la variable de control (conjunto borroso) al que se le dado un peso
- **Interpretación de la conclusión de una regla**
  - otro conjunto borroso con función de pertenencia producto del peso por la función de pertenencia primitiva

$$\mu'_{ij}(u(t)) = m_{ij} \cdot \mu_k(u(t))$$

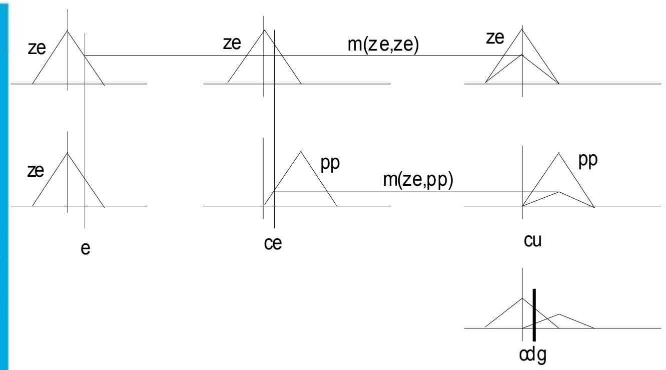
- **Conclusión del conjunto de reglas**
  - conjunto de conjuntos borrosos con sus respectivas funciones de pertenencia

Controladores PID borrosos

- **Desborrosificación (Defuzzyfication). Conclusión numérica.**
  - A partir del conjunto de funciones de pertenencia de salida, se procede al cálculo del valor numérico de la conclusión.
  - métodos:
    - tomar como valor para la variable de control el correspondiente al máximo de la curva suma de todas las funciones de pertenencia
- **calcular el centro de gravedad del área de la curva suma**
  - en este caso no importa la forma de las funciones de pertenencia de las etiquetas lingüísticas de la función de control. Únicamente su centro de gravedad y su área, que normalmente será unitaria.

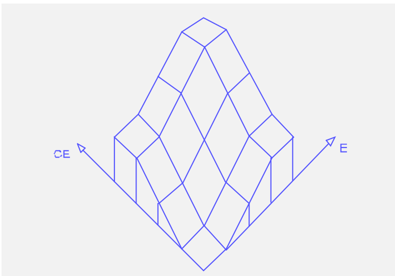
$$cdg = \frac{\sum_i \sum_j c_{ij} m_{ij}}{\sum_i \sum_j m_{ij}}$$

Controladores PID borrosos



Controladores PID borrosos

- La relación entrada-salida no es borrosa



Controladores PID borrosos

- **Múltiples entradas**
- **Múltiples salidas: cada salida un regulador monovariable**
- **Estabilidad de Reguladores Borrosos:**
  Problema de demostración

Controladores PID borrosos

- Generalización
  - Uso de otras variables para control
  - Se utiliza la misma estructura de control

SI la temperatura es caliente
Y el oxígeno un poco bajo
ENTONCES abrir un poco la ventilación

Controladores PID borrosos

- Ventajas
  - No es necesario un MODELO preciso del sistema a controlar.
  - Se implementan fácilmente los CONOCIMIENTOS del operador humano (reglas expresadas en términos lingüísticos).
  - Resulta posible alcanzar con facilidad las ESPECIFICACIONES de tiempo y transitorio fijadas.
  - El controlador borroso es POCO SENSIBLE a cambios de los parámetros del sistema a controlar (no es lineal).
  - Permiten contemplar situaciones excepcionales del estado del proceso, gracias a su forma de representar el conocimiento.

Controladores PID borrosos

- Inconvenientes
  - Resulta imprescindible la presencia de un experto que suministre el conocimiento necesario
  - Una modificación en los parámetros del controlador obliga a una revisión de todo el conjunto de reglas para detectar la aparición de nuevas inconsistencias o tendencias hacia la inestabilidad

Controladores PID borrosos

- APLICACIONES INDUSTRIALES
  - Procesos difíciles de AUTOMATIZAR y que, paradójicamente, son controlados fácilmente por operadores humanos.
  - Procesos con INCERTIDUMBRE, poco definidos.
  - Difícil ESTIMACIÓN de los parámetros que definen el proceso.
  - Sistemas COMPLEJOS, no lineales, de orden elevado, variantes con el tiempo.
  - Situaciones en las que resulta difícil la MEDICIÓN del valor de las variables a controlar (procesos biológicos, reacciones químicas complejas).

INDUSTRIALES ETSII | UPM

Sumario

- Orígenes del pensamiento borroso
- Lógica y lógicas
- Lógica borrosa
- Controladores PID borrosos
- **Modelado Borroso**
- Aplicación al control

POLITÉCNICA

45

INDUSTRIALES ETSII | UPM

Modelado Borroso

- Obtener un modelo borroso de un sistema dinámico
  - Modelo de la planta
  - Modelo del regulador
- Tipos de modelos
  - Mamdani
  - Takagi-Sugeno

POLITÉCNICA

46

INDUSTRIALES ETSII | UPM

Modelado Borroso

- Supuesta una función

$$f:\Re^n \rightarrow \Re \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

En la que se supone que existen un conjunto de variables medibles

$$\{z_1, z_2, \ldots z_m\}$$

que pueden ser alguna o todas las variables x_i o variables asociadas que permiten determinar la función

POLITÉCNICA

47

INDUSTRIALES ETSII | UPM

Modelado Borroso

- Modelo de Mamdani

$$f:\Re^n \rightarrow \Re \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  - Se modela como un conjunto de reglas de la forma

$$S^{(i_1 \ldots i_n)}: if\ z_1\ is\ M_1^{i_1}\ and\ z_2\ is\ M_2^{i_2}\ and\ \ldots\ z_m\ is\ M_m^{i_m}$$
$$then\ \ \hat{y}\ is\ M_y^{(i_1 \ldots i_m)}$$

  - O en función del centro de gravedad

$$S^{(i_1 \ldots i_m)}: if\ z_1\ is\ M_1^{i_1}\ and\ z_2\ is\ M_2^{i_2}\ and\ \ldots\ z_m\ is\ M_m^{i_m}$$
$$then\ \ \hat{y} = c^{(i_1 \ldots i_m)}$$

POLITÉCNICA

48

Modelado Borroso

- Si $\mu_j^{i_j}(z_j)$ son las distintas funciones de pertenencia
- Se define

$$w^{(i_1 \dots i_m)}(z) = \prod_{j=1}^{m} \mu_j^{i_j}(z_j)$$

- Y entonces

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} w^{(i_1 \dots i_m)}(z) c^{(i_1 \dots i_m)}}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} w^{(i_1 \dots i_m)}(z)}$$

49

Modelado Borroso

- Modelo de Takagi-Sugeno
  - Dada la función

$$f: \Re^n \rightarrow \Re \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

  - Se modela como un conjunto de reglas de la forma

$$S^{(i_1 \dots i_m)}: if\ z_1\ is\ M_1^{i_1}\ and\ z_2\ is\ M_2^{i_2}\ and\ \dots z_m\ is\ M_m^{i_m}$$

$$then\ \ \hat{y} = p_0^{(i_1 \dots i_m)} + p_1^{(i_1 \dots i_m)} x_1 + p_2^{(i_1 \dots i_m)} x_2 + \dots + p_n^{(i_1 \dots i_m)} x_n$$

50

Modelado Borroso

- Si $\mu_j^{i_j}(z_j)$ son las distintas funciones de pertenencia
- Se define

$$w^{(i_1 \dots i_m)}(x) = \prod_{j=1}^{m} \mu_j^{i_j}(z_j)$$

- Y entonces

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} w^{(i_1 \dots i_m)}(x) \left[p_0^{(i_1 \dots i_m)} + p_1^{(i_1 \dots i_m)} x_1 + \dots + p_n^{(i_1 \dots i_m)} x_n \right]}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} w^{(i_1 \dots i_m)}(z)}$$

51

Modelado Borroso

- Llamando

$$\beta_k^{(i_1 \dots i_m)} = \frac{w^{(i_1 \dots i_m)}(z_k)}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} w^{(i_1 \dots i_m)}(z_k)}$$

- Se puede expresar como

$$\hat{y} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} \beta_k^{(i_1 \dots i_m)} \left[p_0^{(i_1 \dots i_m)} + p_1^{(i_1 \dots i_m)} x_1 + \dots + p_n^{(i_1 \dots i_m)} x_n \right]$$

52

Identificación T-S

INDUSTRIALES
ETSII | UPM
POLITÉCNICA

- Si tenemos un conjunto de muestras entrada/salida

$$\{x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}, y_k, z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{mk}\}$$

- Los parámetros del sistema borroso se pueden determinar minimizando

$$J = \sum_{k=1}^{\nu} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \|Y - XP\|^2$$

53

Identificación T-S

INDUSTRIALES
ETSII | UPM
POLITÉCNICA

- Donde

$$Y = \left[y_1 \; y_2 \cdots y_\nu\right]^t$$

$$P = \left[p_0^{(1\ldots1)} \; p_1^{(1\ldots1)} \; p_2^{(1\ldots1)} \ldots p_n^{(1\ldots1)} \cdots p_0^{(r_1\ldots r_m)} \ldots p_n^{(r_1\ldots r_m)}\right]^t$$

$$X = \begin{bmatrix} \beta_1^{(1\ldots1)} & \beta_1^{(1\ldots1)} x_{11} \ldots \beta_1^{(1\ldots1)} x_{n1} \cdots \beta_1^{(r_1\ldots r_m)} \ldots \beta_1^{(r_1\ldots r_m)} x_{n1} \\ & \vdots \\ \beta_\nu^{(1\ldots1)} & \beta_\nu^{(1\ldots1)} x_{1\nu} \ldots \beta_\nu^{(1\ldots1)} x_{n\nu} \cdots \beta_\nu^{(r_1\ldots r_m)} \ldots \beta_\nu^{(r_1\ldots r_m)} x_{n\nu} \end{bmatrix}$$

54

Identificación T-S

INDUSTRIALES
ETSII | UPM
POLITÉCNICA

- Si la matriz X es de rango completo

$$J = \|Y - XP\|^2 = (Y - XP)^t (Y - XP)$$

$$\nabla J = -2(Y - XP)^t X = 0$$

$$X^t (Y - XP) = X^t Y - X^t XP = 0$$

$$P = (X^t X)^{-1} X^t Y$$

55

Identificación T-S

INDUSTRIALES
ETSII | UPM
POLITÉCNICA

- Si X no es de rango completo se puede extender la función objetivo incluyendo una ponderación de la distancia de los parámetros a los parámetros lineales

$$J = \sum_{k=1}^{\nu} (y_k - \hat{y}_k)^2 + \gamma^2 \sum_j \left(p_j - p_{j0}\right)^2 = \|Y - XP\|^2 + \gamma^2 \|P - P_0\|^2$$

$$\nabla J = -2(Y - XP)^t X + 2\gamma^2 (P - P_0)^t = 0$$

$$X^t (Y - XP) - \gamma^2 (P - P_0) = X^t Y + \gamma^2 P_0 - (X^t X + \gamma^2 I) P = 0$$

$$P = (X^t X + \gamma^2 I)^{-1} (X^t Y + \gamma^2 P_0)$$

56

Sumario

- Orígenes del pensamiento borroso
- Lógica y lógicas
- Lógica borrosa
- Controladores PID borrosos
- Modelado Borroso
- **Aplicación al control**

57

Aplicación a control

- Aplicable a control de sistemas no lineales
  - Caso sencillo: Dado el sistema no lineal

$$x^{(n)} = f(x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}, u)$$

- Modelo de Takagi-Sugeno
  - Se modela como un conjunto de reglas de la forma

$$Si\ z_1\ es\ M_1^{i_1}\ y\ z_2\ es\ M_2^{i_2}\ y \ldots y\ z_m\ es\ M_m^{i_m}$$

$$entonces \quad x^{(n} = a_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} + a_1^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} x + a_2^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} x' + \ldots + b^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} u$$

58

Aplicación a control

- A cada regla del modelo se le asocia una regla del controlador

$$Si\ z_1\ es\ M_1^{i_1}\ y\ z_2\ es\ M_2^{i_2}\ y \ldots y\ z_m\ es\ M_m^{i_m}\ entonces$$

$$u = k_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} + k_1^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} x + \cdots + k_n^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} x^{(n-1}$$

  - k_0 se puede utilizar para eliminar el término independiente

$$a_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} + B^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} k_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} = 0$$

  - La matriz de realimentación se puede diseñar por cualquier método, p.e. mediante LQR
- Es un refinamiento del Control Adaptativo por tabla de reguladores

59

Fuzzy-LQR

- El sistema borroso lo representamos como

$$x = \begin{bmatrix} x & x' & \cdots & x^{(n-1)} \end{bmatrix}^t$$

$$S^{(i_1 \ldots i_n)}: if\ z_1\ is\ M_1^{i_1}\ and\ z_2\ is\ M_2^{i_2}\ and \ldots z_m\ is\ M_m^{i_m}\ then$$

$$x^{(n} = A_0^{(i_1 \ldots i_m)} + A^{(i_1 \ldots i_m)} x + B^{(i_1 \ldots i_m)} u$$

$$A_0^{(i_1 \ldots i_m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0^{(i_1 \ldots i_m)} \end{bmatrix}, \quad A^{(i_1 \ldots i_m)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1^{(i_1 \ldots i_m)} & a_2^{(i_1 \ldots i_m)} & a_3^{(i_1 \ldots i_m)} & \cdots & a_n^{(i_1 \ldots i_m)} \end{bmatrix}, \quad B^{(i_1 \ldots i_m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b^{(i_1 \ldots i_m)} \end{bmatrix}$$

60

INDUSTRIALES ETSII | UPM

POLITÉCNICA

Fuzzy-LQR

- Se aplica la metodología LQR para cada subsistema del modelo, utilizando una matriz Q de ponderación del estado y R de ponderación de la entrada comunes para todas las reglas.
- Se resuelve la ecuación de Riccati para cada subsistema

$$0 = -Q + L^{(i_1 \dots i_m)} B^{(i_1 \dots i_m)} R^{-1} B^{(i_1 \dots i_m)t} L^{(i_1 \dots i_m)} - L^{(i_1 \dots i_m)} A^{(i_1 \dots i_m)} - A^{(i_1 \dots i_m)t} L^{(i_1 \dots i_m)}$$

- Y se obtiene los parámetros de la regla de control

$$K^{(i_1 \dots i_m)} = \left[k_1^{(i_1 \dots i_m)} \quad k_2^{(i_1 \dots i_m)} \quad \dots \quad k_m^{(i_1 \dots i_m)} \right] = R^{-1} \left[B^{(i_1 \dots i_m)} \right]^t L^{(i_1 \dots i_m)}$$

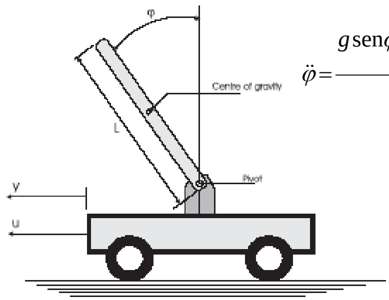
61

INDUSTRIALES ETSII | UPM

POLITÉCNICA

Ejemplo

- Control de un péndulo invertido



$$\ddot{\varphi} = \frac{g\,\mathrm{sen}\varphi - \cos\varphi \left(\dfrac{u + ml\dot{\varphi}^2 \,\mathrm{sen}\varphi}{M+m} \right)}{l \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m\cos^2\varphi}{M+m} \right)}$$

62

INDUSTRIALES ETSII | UPM

POLITÉCNICA

Ejemplo

- Modelo de estado

$$x_1 = \varphi \qquad x_1' = x_2$$

$$x_2 = \dot{\varphi} \qquad x_2' = \frac{g\,\mathrm{sen}x_1 - \cos x_1 \left(\dfrac{u + ml x_2^{\,2}\,\mathrm{sen}x_1}{M+m} \right)}{l \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m\cos^2 x_1}{M+m} \right)}$$

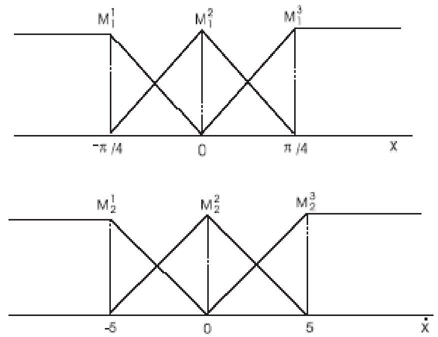
63

INDUSTRIALES ETSII | UPM

POLITÉCNICA

Ejemplo

- Funciones de pertenencia asociadas $z_1 = x_1 \quad z_2 = x_2$



64

Ejemplo

- Modelo de Takagi-Sugeno

S^{11}: *si* x_1 *es* M_1^1 *y* x_2 *es* M_2^1 *entonces* $x_2' = -11.92 + 10.06x_1 - 0.35x_2 - u$

S^{12}: *si* x_1 *es* M_1^1 *y* x_2 *es* M_2^2 *entonces* $x_2' = -10.76 + 10x_1 - u$

S^{13}: *si* x_1 *es* M_1^1 *y* x_2 *es* M_2^3 *entonces* $x_2' = -11.36 + 10.06x_1 + 0.35x_2 - u$

S^{21}: *si* x_1 *es* M_1^2 *y* x_2 *es* M_2^1 *entonces* $x_2' = 13.95x_1 - 1.46u$

R^{22}: *si* x_1 *es* M_1^2 *y* x_2 *es* M_2^2 *entonces* $x_2' = 15.78x_1 - 1.46u$

S^{23}: *si* x_1 *es* M_1^2 *y* x_2 *es* M_2^3 *entonces* $x_2' = 13.95x_1 - 1.46u$

S^{31}: *si* x_1 *es* M_1^3 *y* x_2 *es* M_2^1 *entonces* $x_2' = 11.37 + 10.06x_1 - 0.35x_2 - u$

S^{32}: *si* x_1 *es* M_1^3 *y* x_2 *es* M_2^2 *entonces* $x_2' = 10.76 + 10x_1 - u$

S^{33}: *si* x_1 *es* M_1^3 *y* x_2 *es* M_2^3 *entonces* $x_2' = 11.92 + 10.06x_1 + 0.35x_2 - u$

Ejemplo

- En primer lugar el término afín del control se utiliza para eliminar el término afín del sistema

$$a_0^{(i_1 i_2)} + b^{(i_1 i_2)} k_0^{(i_1 i_2)} = 0 \Rightarrow k_0^{(i_1 i_2)} = -\frac{a_0^{(i_1 i_2)}}{b^{(i_1 i_2)}}$$

- Los otros términos se calculan mediante LQR minimizando el índice

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left(100x_1^2 + 10x_2^2 + u^2\right) dt$$

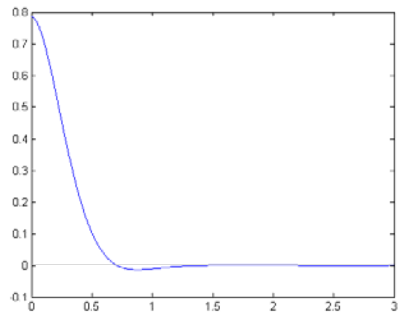
Ejemplo

- Control LQR

$$\begin{aligned}
R^{11}&: \ u(t) = -11.9200 + 24.2446x_1 + 7.3058x_2 \\
R^{12}&: \ u(t) = -10.7600 + 24.1421x_1 + 7.6344x_2 \\
R^{13}&: \ u(t) = -11.3600 + 24.2446x_1 + 8.0058x_2 \\
R^{21}&: \ u(t) = 23.3857x_1 + 6.4835x_2 \\
R^{22}&: \ u(t) = 25.5329x_1 + 6.7065x_2 \\
R^{23}&: \ u(t) = 23.3857x_1 + 6.4835x_2 \\
R^{31}&: \ u(t) = 11.3700 + 24.2446\,x_1 + 7.3058x_2 \\
R^{32}&: \ u(t) = 10.7600 + 24.1421\,x_1 + 7.6344x_2 \\
R^{33}&: \ u(t) = 11.9200 + 24.2446x_1 + 8.0058x_2
\end{aligned}$$

Ejemplo

- Respuesta a estado inicial no nulo



INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Ejemplo

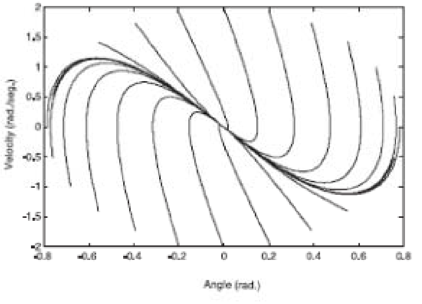


Figure 7: Trajectories of the system for several initial conditions

69

POLITÉCNICA

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Sistemas de Control Borroso

POLITÉCNICA