Control por moldeo de energía
Aplicación al péndulo invertido

Francisco Gordillo

Universidad de Sevilla

5 de mayo de 2014
UNED

El péndulo invertido

Péndulo en carro

Péndulo de Furuta

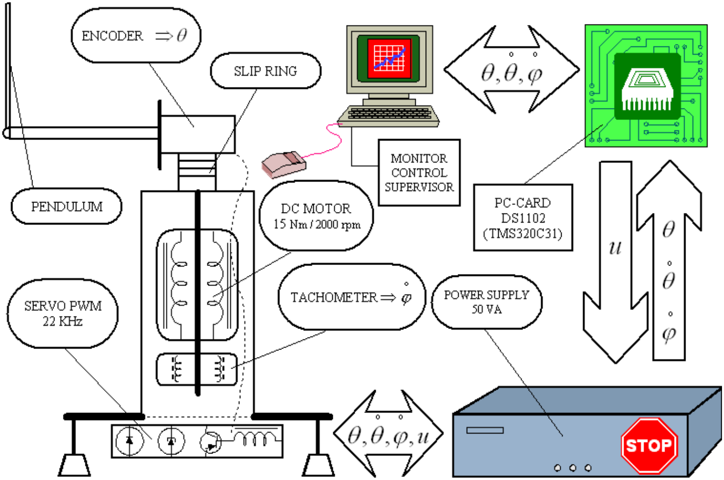
- Estabilización de la posición superior
- Swing up
- Generación de oscilaciones

Índice

¿Por qué es interesante el control de péndulos?

- Buenos prototipos de muchos problemas de control
  - Estabilización de sistemas inestables
  - Grandes transiciones (swing-up)
  - Cuenca de atracción, estabilidad global
  - Control manual
  - Compensación de fricción
- Dificultades graduales: péndulo, péndulo en un carro, péndulo de Furuta, péndulo esférico.
- Similar a algunos problemas de control ingenieriles: sistemas de potencia, sistemas de fijación de fase (phaselock), unión Josephson, lanzamiento de cohetes.

Diagrama de bloques del sistema de control



Modelo del péndulo de Furuta

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{1}{\Delta}\Big(-\alpha^2\dot{\theta}^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta + (\beta + \mathrm{sen}^2\theta)\dot{\varphi}^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta + 2\alpha\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{sen}\theta\cos^2\theta \\
&+ \beta\omega_0^2 \mathrm{sen}\theta + \omega_0^2 \mathrm{sen}^3\theta - \alpha\gamma\omega_0^2\cos\theta u\Big) \\
\ddot{\varphi} &= \frac{1}{\Delta}\Big(\alpha\dot{\theta}^2\mathrm{sen}\theta - \alpha\dot{\varphi}^2\mathrm{sen}\theta\cos^2\theta - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{sen}\theta\cos\theta \\
&- \alpha\omega_0^2\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \omega_0^2\gamma u\Big)
\end{aligned}
$$

- θ: Ángulo del péndulo
- φ: Ángulo del brazo
- $\alpha, \beta, \gamma, \omega_0^2$: Parámetros
- $\Delta = J(\beta + \mathrm{sen}^2\theta - \alpha^2\cos^2\theta)$

Linealización parcial

$$
u = \frac{1}{\omega_0^2\gamma}\left(\Delta v - (\alpha\dot{\theta}^2\mathrm{sen}\theta - \alpha\dot{\varphi}^2\mathrm{sen}\theta\cos^2\theta - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{sen}\theta\cos\theta - \alpha\omega_0^2\mathrm{sen}\theta\cos\theta)\right)
$$

Tras la linealización parcial

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= a\mathrm{sen}\theta + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\mathrm{sen}2\theta - b\cos\theta v \\
\ddot{\varphi} &= v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= a\mathrm{sen}x_1 + \frac{1}{2}x_3^2\mathrm{sen}2x_1 - b\cos x_1 v \\
\dot{x}_3 &= v \\
\dot{x}_4 &= x_3
\end{aligned}
$$

Estabilización de la posición superior: LQR

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} (x^\top Q x + u^\top R u) dt$$

$$u = -Kx$$

Si $\dot{x} = f(x,u)$ con $f(0,0) = 0$ entonces $A \approx \frac{\partial f}{\partial x}$, $B \approx \frac{\partial f}{\partial u}$

- Garantizada la estabilidad y robustez
- Funciona en el entorno del equilibrio superior
- Cuenca de atracción limitada

Sistemas Hamiltonianos

$$\dot{x} = (J - R)\frac{\partial H}{\partial x} \qquad J = -J^\top, R = R^\top > 0$$

Candidata a función de Liapunov: H.

$$\dot{H} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top \dot{x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top (J - R)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top R\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) < 0$$

- Inspirado en sistemas mecánicos.
- En los sistemas mecánicos $H = T + V$ es la energía del sistema.
- Generalización del concepto de energía.

Sistemas Hamiltonianos generalizados

$$\dot{x} = (J - R)\frac{\partial H}{\partial x} + g(x)u \qquad J = -J^\top, R = R^\top > 0$$

Moldeo de energía: Elegir una nueva función de energía H_d tal que:

- Corresponda al comportamiento deseado.
- Tenga solución la ecuación:

$$\dot{x} = (J - R)\frac{\partial H}{\partial x} + g(x)u = (J - R)\frac{\partial H_d}{\partial x}$$

- También se puede cambiar la matriz de interconexión $J \to J_d$; $R \to R_d$.

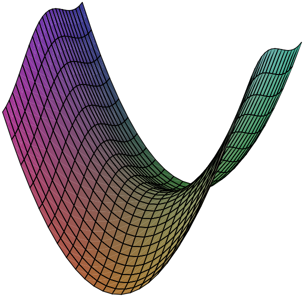
El péndulo invertido como sistema hamiltoniano

- Nos centramos solamente las dos primeras ecuaciones y en el caso de péndulo en el carro.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \mathrm{sen} x_1 - \cos x_1 v
\end{aligned}
$$

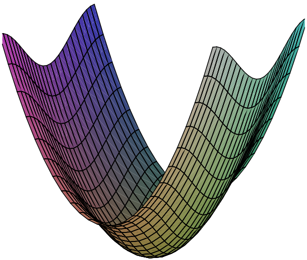
$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix} - \cos x_1 v
$$

$$
H = \frac{1}{2} x_2^2 + \cos x_1 - 1
$$



Moldeo de energía

- Búsqueda de una función de energía:
  - Con un mínimo en el punto deseado
  - La ley de control correspondiente debe estar definida globalmente
- Elección: $H_d(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + V_d(x_1)$
- Elección más simple: $H_d(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1 + 1$



- Inversión de la gravedad

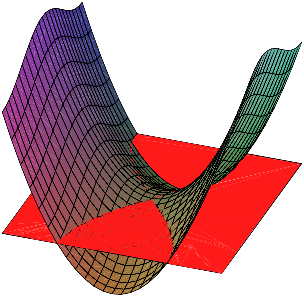
$$\mathrm{sen} x_1 - v \cos x_1 = -\mathrm{sen} x_1$$

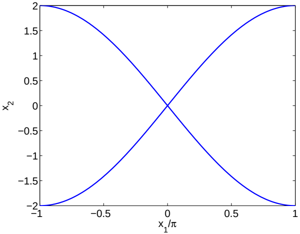
$$v = 2 \tan x_1$$

No válida para $x_1 = \pm\frac{\pi}{2}$

Swing-up

- Función de energía: $H = \frac{1}{2}x_2^2 + \cos x_1 - 1$
- Energía de la posición superior $H^* = 0$





- No se cambia la energía.
- En este caso estabilizamos un cierto nivel de energía: la energía crece o decrece a voluntad.

Swing-up. Diseño del controlador

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mathrm{sen} x_1 - v \cos x_1\end{aligned}$$

- $H = \frac{1}{2} x_2^2 + \cos x_1 - 1$
- $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \dot{x}_2 = -x_2 v \cos x_1$
- Haciendo $v = b \mathrm{sign}(x_2 \cos x_1 (H - H^*)); \quad b > 0$
- $\dot{H} = -b|x_2 \cos x_1| \mathrm{sign}(H - H^*)$

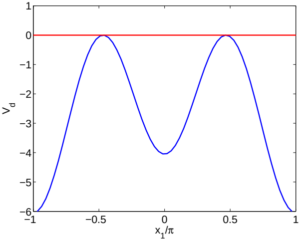
Análisis de la ley de swing-up

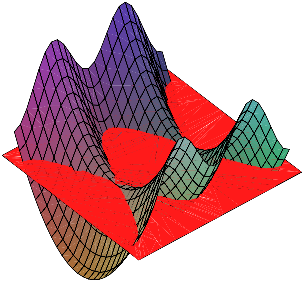
- Solamente realiza el swing-up (no estabiliza).
- Estabiliza la órbita homoclina.
- El equilibrio deseado sigue siendo una ensilladura.
- Su variedad estable se ha vuelto “muy atractiva”.
- El péndulo tiende a la posición superior.
- Cualquier perturbación lo hace caer de nuevo (se vuelve a recuperar).
- Es necesaria una ley híbrida.

Ley única para estabilización y swing-up

$$H_d(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + V_d(x_1)$$

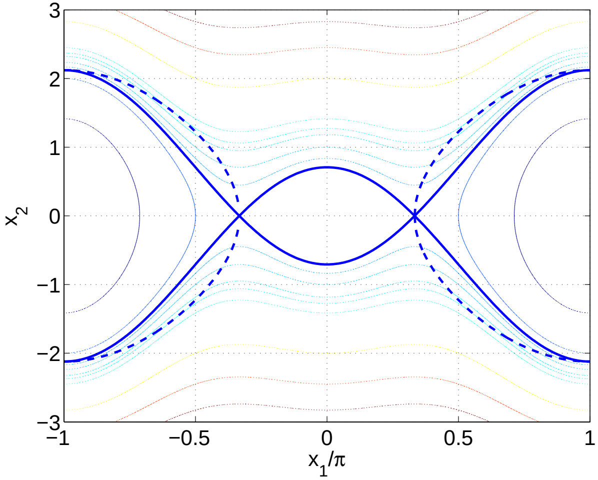
$$V_d(x_1) = \cos x_1 - a\cos^2 x_1 - \frac{1}{4a}; \quad a > 0.5$$





$$\mathrm{sen} x_1 - v\cos x_1 = \mathrm{sen} x_1 - 2a\,\mathrm{sen} x_1 \cos x_1 \Rightarrow v = 2a\,\mathrm{sen} x_1$$

Ley única para estabilización y swing-up

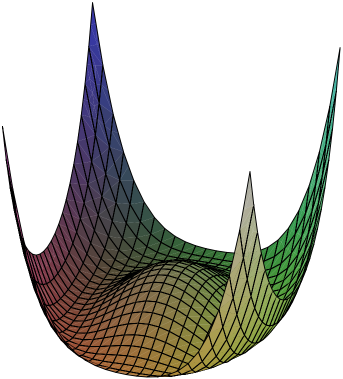


Es muy fácil modificar el comportamiento de un sistema Hamiltoniano

Generación de oscilaciones

- Función de energía deseada:

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{4}\Gamma^2 \\
\Gamma &= x_1^2 + x_2^2 - \mu
\end{aligned}
$$



Oscilaciones: diseño del controlador

- Sistema deseado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - k_1 x_1 (x_1^2 + x_2 - \mu)\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - k_2 x_2 (x_1^2 + x_2 - \mu)\end{aligned}$$

- Modelo del péndulo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \mathrm{sen} x_1 - v \cos x_1\end{aligned}$$

- Ajuste: $k_1 = 0$, $v = (\mathrm{sen} x_1 + x_1 + k_2 x_2 (x_1^2 + x_2 - \mu)) / \cos x_1$
- Solamente válida por encima de la horizontal.

Conclusiones

- Enfoque energético: el controlador cambia la energía del sistema (incluso la variación de la energía).
- Leyes de control para controlar el péndulo invertido:
  - Estabilización de la posición superior
  - Swing-up
  - Ley única de swing-up y estabilización.
  - Oscilaciones
- Se han tenido en cuenta las dos primeras variables de estado. Es necesario extender al resto y tener en cuenta el término de Furuta.