Gracias. Gracias.

Tema Grupos, un juego con bloques lógicos El tema de hoy persigue un doble objetivo Por una parte, reforzar la idea de grupo que ha sido desarrollada en la unidad didáctica número 1 Para ello, se ha buscado un juego didáctico de forma que la exposición y desarrollo que vamos a hacer puedan ser aplicados tal cual a los alumnos de la segunda etapa El segundo objetivo es pues eminentemente didáctico Vamos a trasladarnos a la clase Los alumnos están preparando el material Papel y lápiz Y seis bloques lógicos Dos cuadrados, dos triángulos y dos círculos

unos rojos y otros azules. Tenéis un conjunto de seis bloques que vamos a llamar B. Paco, ¿qué elementos forman el conjunto B? Un cuadrado rojo, un cuadrado azul, un triángulo rojo, un triángulo azul, un círculo rojo y un círculo azul. Bien, vamos a definir ahora dos operadores sobre el conjunto B que está formado por los seis bloques lógicos que Paco acaba de enumerar. El primer operador cambia el color sin cambiar la forma. Por eso vamos a llamarle C inicial de color. Mari Carmen, ¿cómo cambiará C nuestros bloques? Pues, es muy sencillo. Como solo hay dos colores, vamos a cambiarlo para que se vea más genuino. Viven en K, del HIS, del IB, en SN y en K, eventosajcie en worship, eventosete en worship. ¿Qué es lo que arguing hace? Es decir, el último de los tres bankerka salió firme, síb birth. Las características de sus vidas son son Geschlecht, Schlesinger, Rabodee, ont steril interfaces, Schlisselberg,

los bloques rojos se transformarán en azules y los azules en rojos. No debemos preocuparnos de la forma, porque C cambia el color sin variar la forma. Así que, repito, los rojos cambiarán a azules y los azules a rojos. El segundo operador cambia la forma sin cambiar el color. Le llamaremos F inicial de forma. Pero ahora tenemos tres formas. ¿Cómo sabremos entonces si el triángulo, por ejemplo, cambia al cuadrado o al círculo? Tienes razón. Si solo os dijese que cambia la forma sin precisar nada más, cada uno podría hacer una cosa distinta, porque hay más de una posibilidad. Un cuadrado podemos transformarlo en un círculo o en un triángulo. Y lo mismo ocurriría con todos los demás bloques. Es necesario, pues, que nos contemos.

Pongamos previamente de acuerdo en la manera de actuar de F. Bastará con que escojamos una de entre todas las posibilidades, pero eso sí, una vez fijada, ya no podremos cambiarla. De todas las posibilidades vamos a elegir, por ejemplo, la siguiente. F cambia círculo por cuadrado. F cambia cuadrado por triángulo. Y F cambia triángulo por círculo. Anotadlo en vuestro papel mientras lo escribo en la pizarra para que no se nos olvide. Así pues, decidme, ¿en qué se convertirá el cuadrado azul si le aplicamos F? Como F sólo cambia la forma, el bloque resultante... ...seguirá siendo azul. Y como un cuadrado...

pasa a ser un triángulo, tendrá que darnos el triángulo azul. Sí, eso es. El cuadrado azul se transforma por F en el triángulo azul. Bien, ahora una pregunta más difícil. Si al círculo rojo se le aplica F y al resultado obtenido le aplicamos otra vez F, ¿qué bloque tendremos al final? El círculo rojo cambia por F al cuadrado rojo. Y el cuadrado rojo pasa al triángulo rojo al aplicar otra vez F. Entonces dime tú mismo. ¿En qué se transforma el círculo rojo al aplicar dos veces seguidas F? El círculo rojo se transforma aplicando dos veces seguidas F en el triángulo rojo. Pensad un momento si se podría haber pasado del círculo rojo al triángulo rojo al aplicar dos veces seguidas F a el gra 믿. El círculo rojo se transforma en la misma lugar точuando una rodilla carts brinkитель. Y o

o o o o o oro oro o oro oro rojo o

utilizando únicamente el operador C o el operador F. C cambia el color y obtendríamos un bloque azul, y sin embargo, el que tenemos sigue siendo rojo. Y con F, que cambia la forma, pasaríamos a un cuadrado, pero no a un triángulo. No, no es posible. Como veis, el cambio que hemos hecho no es posible usando únicamente C o únicamente F. Por eso, aplicar dos veces F es un operador distinto de los que ya teníamos. Le daremos un nombre, por ejemplo, FF, para indicar que hemos aplicado dos veces F. Y si hacemos actuar a C y después a F, nos dará también un operador distinto, esperanza.

lo que distinto. Aplicad C y después F y más tarde observaremos los resultados. Yo he tomado el círculo azul y al aplicar C y después F he llegado a un cuadrado rojo. Veo que ha cambiado a la vez el color y la forma del bloque que había tomado. Y eso no hubiera podido hacerlo con ninguno de los operadores anteriores. Explica entonces, Mari Carmen, por qué no puedes hacerlo con los operadores que ya teníamos. Si tomo F, solo cambia la forma, pero no el color. F, F cambia dos veces la forma, pero el color sigue siendo el mismo.

siendo el mismo y C cambia el color pero no cambia la forma. Ninguno sirve porque he cambiado las dos cosas a la vez. Hemos encontrado entonces un operador nuevo pero no sé cómo llamarlo. CF o FC. Como has cambiado primero el color y después la forma, debes llamarlo FC. Recuerda que siempre que componemos aplicaciones, escribimos en orden inverso a cómo actúan. Entonces, si el anterior se escribe FC, el que se escriba CF, que cambiará primero la forma y después el color, puede ser otro operador distinto. ¿Y el segundo del FC? Podemos averiguarlo enseguida. Tomad otra vez el mismo bloque de antes. Aplicad ahora primero F y después C.

Es verdad, da lo mismo Si aplico F, el círculo azul pasa a un cuadrado azul Y al aplicar C, obtengo un cuadrado rojo Igual que antes ¿Os ha ocurrido lo mismo a todos? Sí Entonces es lo mismo CF que FC Es decir, son el mismo operador Ya que ambos actúan de la misma forma Sobre todos y cada uno de los bloques de B Aplicad ahora FFF ¿Qué observáis? Lo... Sibod Aberto Es el mejor Beline Gracanna Omy Round Frías Nrimad Practally Double Lo que tenemos vamos a pedirles siempre Muchas gracias error

Se tome el bloque que se tome, siempre queda igual. Cambiar tres veces la forma es no hacer nada. Es un operador nuevo, pero todos los que teníamos cambiaban algo, y este no. Sí, se trata de un nuevo operador que efectivamente no cambia nada. Podemos llamarle entonces N, inicial de nada, para recordar que transforma cada bloque en sí mismo, es decir, lo deja como estaba. Yo he observado que si aplico dos veces C, tampoco cambia nada. Porque si cambio rojo por azul por C, y luego azul por rojo también por C, vuelvo a obtener rojo. Por eso CC es también N. Eso es. Por tanto, tenemos hasta ahora los siguientes...

operadores F, C, FF, CF y N. ¿Pero existirán más? Para averiguarlo vamos a hacer todas las composiciones posibles con los operadores que ya tenemos. Con el fin de anotar los resultados de forma ordenada, confeccionemos una tabla de doble entrada. Disponed los operadores en este orden. C, F, FF, CF y N. Va a ser muy largo. Podemos abreviar mucho si nos acordamos de que F, F, F es igual que CC, igual a N. Por tanto, tres Fs o dos Cs son iguales a N. Se pueden sustituir por N. Y como N no cambia nada, se puede sustituir por N.

Cualquier operador IN nos va a dar siempre ese operador. Tienes razón. Además sabemos también que CF y FC son lo mismo. Aprovechad pues todas esas observaciones y rellenad la tabla. A esta tabla le llamaremos tabla 1. Recuerde que la tabla 1 se encuentra en la nota que ha recibido. Si alguno de vosotros la tiene ya completa, puede escribirla en la pizarra. Yo misma.

Muy bien, vamos a observar esta tabla 1. ¿Encontráis en ella algún operador distinto de los que ya teníamos? Sí, hay uno nuevo, el CFF. Entonces, tenemos hasta ahora seis operadores. C, F, FF, CF, N y CFF. Pero tengo una duda. ¿Existirán todavía más? Vamos a verlo. Componed unos con otros estos operadores igual que hicimos antes y disponed los resultados en otra tabla de doble entrada que llamaremos tabla 2. Seguimos. Siguiendo este orden. C. C.

F, FF, CF, CFF y N. Asimismo, la tabla 2 está completa en la nota citada. Paco, ¿quieres escribir tu resultado en la pizarra para que tus compañeros vayan contrastando con los que ellos han obtenido? A mí también me da lo mismo. Observemos ahora esta tabla 2. ¿Hay en ella algún operador que no tuviéramos antes? No. Todos los resultados...

han sido operadores que ya teníamos. Como veis, los operadores que hemos definido al principio, f y c, han generado, al componerse varias veces unos con otros, nuevos operadores. En un principio encontramos cf, ff y n. Y después, con la tabla 1, aparecía un nuevo operador, cff. Tenemos en total un conjunto de 6 operadores para transformar los bloques de b. Y sabemos que no hay más, pues de lo contrario hubieran aparecido en la tabla 2 que acabáis de hacer. Vamos a llamar g al conjunto formado por esos 6 operadores que hemos encontrado. C, f, ff, cf, n y cff.

Además veo que todas las casillas de la tabla 2 están rellenas No hay ningún hueco Como ya sabéis, eso quiere decir que la composición de operadores es una ley interna en el conjunto G Siempre podemos componer dos operadores de G Y el resultado será también un operador perteneciente a G Tomad ahora tres operadores cualesquiera Por ejemplo F, CF y CFF Y haced lo siguiente Componed F con CF ¿Qué os da? CFF Componed ahora el operador que os ha salido con CFF El resultado es F Vamos a comenzar Vamos a componer esos tres operadores elegidos F, CF y CFF

pero ahora de la siguiente manera. Componed CF con CFF y decidme el resultado. N. Aplicad ahora el operador que nos quedaba, F, con el resultado que acabáis de obtener. ¿Qué os sale? F igual que cuando lo hemos hecho de la otra forma. Es verdad. Obtenemos en los dos casos F. Luego podemos asociar como queramos. El resultado será siempre el mismo. Eso es. Y si tomáis todos los operadores y los componéis de tres en tres, veréis que siempre da el mismo operador, se asocien de una u otra forma. Podemos decir entonces que la composición de operadores tiene... ¿Qué propiedad? La asociativa. ¿Me dejáis que intente resumir lo descubierto hasta ahora? No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No. No.

Sabemos, la operación composición de operadores es ley interna. Todas las casillas de la tabla 2 quedaban rellenas con elementos de G. Y además, acabamos de ver que la composición de operadores posee la propiedad asociativa. En la unidad didáctica número 1, dice que cuando un conjunto con una operación cumple que esa operación es interna y asociativa, el par formado por el conjunto y la operación recibe el nombre de semigrupo. Entonces, ¿nuestro conjunto G con la composición de operadores es un semigrupo? Efectivamente. Pero continuemos y

veamos si existen más propiedades. Mirad ahora la tabla 2 y buscad a la que se encuentra la tabla 2.

algún elemento de G que tenga un comportamiento especial que lo distinga de los demás. Todos los operadores que hay en G cambian algo, menos el N, que no hace nada. Al confeccionar la tabla me he dado cuenta de que al componer cualquier otro operador con N siempre obtenía ese otro operador. Además, la fila y la columna en las que está N son iguales a la de arriba del todo y a la de la izquierda del todo, respectivamente. En efecto, por eso, como aplicar N equivale a no hacer nada, diremos que N es igual a la fila y la columna en las que está N. Este es el elemento neutro. Siempre que encontremos un elemento neutro,

que operado con todos los demás del conjunto los de G invariantes estaremos en presencia de dicho elemento neutro. Por tanto, tenemos hasta ahora un semigrupo con elemento neutro, lo que también se llama monoide. Diremos pues que G, con la composición de operadores, es un semigrupo con elemento neutro, o más brevemente, que es un monoide. Ahora, fijaos bien. Voy a aplicar el operador C. ¿Qué deberé hacer a continuación para obtener el bloque del que he partido? Aplicar otra vez C. ¿Y cómo lo sabes? No nos ha dicho de qué bloque ha partido. No, no lo sé. Aplicar otra vez C.

No necesito saberlo. Ya habíamos visto que aplicando dos veces C volvíamos siempre al mismo bloque. Bien. Así que haciendo C y otra vez C, volvemos al sitio de partida. Es decir, C y después C es igual que N. Ahora os pregunto. ¿Qué operador deberemos utilizar para volver al principio si hemos hecho actuar a CF? Con CF cambiábamos el color y la forma. Para volver al bloque de partida, deberemos usar un operador que nos diga que el bloque de partida es el que más nos gusta. Y un operador que lleve C para volver a tener el color inicial. Eso no basta. Deberá llevar C.

también FF, porque ya sabíamos que FFF equivalía a dejar la forma invariante. Entonces, después de CF, tenemos que aplicar CFF para quedarnos como estábamos. O sea, que también aplicar CF y después CFF es lo mismo que aplicar N. Y, ¿cómo se llaman los operadores tales que al componerlos entre sí dan el neutro N? Cuando al componer dos elementos de G obtenemos el elemento neutro, que es N, decimos que esos operadores son simétricos el uno del otro. ¿Y todos los elementos de G tienen simétrico? ¿No? Hasta ahora solo hemos visto que C es simétrico de C. Y que CF es simétrico.

de CFF, pero no sabemos si F y FF son simétricos. Eso es fácil de averiguar. Componemos F con FF y si el resultado es N, podremos afirmar que F y FF son, por tanto, simétricos. Tienes razón. Vamos a hacerlo. No te hace falta. Mira en la tabla la casilla que corresponde a la fila de F y a la columna de FF. Ese es el resultado. Ya lo hemos hecho antes. En esa casilla aparece N. Luego F y FF son simétricos. También observo, mirando la tabla, que todos los elementos de G tienen simétrico, pues en todas las filas. Aparece una vez el elemento neutro.

Es cierto, podemos mirar la tabla y comprobar que el simétrico de F es FF, que el simétrico de C es C y, por último, que el simétrico de CF es CFF. Llegamos pues a la conclusión de que todos los elementos de G poseen simétrico. Hasta ahora sabemos del par formado por el conjunto G y la composición de operadores lo siguiente. Es ley interna. Es asociativa. Existe elemento neutro y todo elemento tiene simétrico. Cuando un conjunto con una operación

posee estas cuatro propiedades, decimos que tiene estructura de grupo. Entonces, el conjunto G con la operación composición de operadores es un grupo. Claro, pero vamos a ver todavía una cosa más. Mirad si la tabla es simétrica respecto de la diagonal principal. Es decir, si doblando la tabla por la diagonal, las letras de las casillas que se superponen coinciden, ¿o no? Sí. ¿Por qué ocurre eso? Si os habéis fijado, habréis visto al principio que CF era lo mismo que FC. Es decir, que F y C conmutan. Y como todos nuestros operadores llevan C y F, conmutan unos con otros. Es decir, se puede ver que los operadores de la tabla son los mismos. Se pueden operar en el orden que se quiera y el resultado será siempre

siempre el mismo. Las casillas que están por encima de la diagonal corresponden a la composición de operadores en un orden determinado. En las casillas que están por debajo aparecen esas mismas composiciones, pero en orden cambiado. Como en nuestro caso todos los operadores conmutan, los resultados de las casillas veréis que son los mismos. Entonces podemos decir que la composición de los elementos de G tiene la propiedad conmutativa. Eso es. Con todo lo visto, podemos añadir al grupo que ya teníamos una propiedad más, la propiedad conmutativa. ¿Se sobreentiende entonces que la propiedad conmutativa no es una propiedad necesaria para que un conjunto dotado de una ley de composición forme grupo? Por supuesto. Con las propiedades.

ley interna, asociativa, existencia de elemento neutro y existencia de simétrico para cada elemento es suficiente para que un conjunto con una ley de composición forme un grupo. Si además posee, como en este caso, la propiedad conmutativa, diremos que se trata de un grupo conmutativo o abeliano. Así pues, el conjunto G con la composición de operadores es un grupo conmutativo o abeliano. Gracias por ver el video.

Gracias. Gracias.