EGB 8 9

Asignatura, Matemáticas. Título, Cuadrilátero, ¿Cuál? Autores, María del Carmen Chamorro Plaza, María Esperanza Garijo Fernández y Francisco Vecino Rubio. Fecha de emisión, 6 de junio de 1981.

Les presentamos hoy un guión en el que se pretende ver la conexión entre las mal llamadas matemática antigua y matemática moderna a través de una actividad de geometría. En ella se tratará de llegar a una clasificación de los cuadriláteros por medio de los movimientos que los dejan globalmente invariantes. Recuerden que un movimiento deja globalmente invariante una figura cuando ésta queda en el mismo lugar que ocupaba antes de realizar dicho movimiento.

No importa pues si cada punto pasa a ocupar un lugar distinto del que tenía con tal de que se cumpla lo anterior. Esto no excluye que determinados puntos puedan ser invariantes por ese movimiento. Hace unos pocos años hice un viaje a un extraño país llamado Plano.

Sus habitantes eran muy particulares y discutían sin cesar sobre su parentesco. Hablaban, hablaban y... Os contaré lo que ocurrió. Sorprendí a tres de ellos en animada charla.

Se llamaban Cuadrado, Rombo y Rectángulo. Decía el Rombo. Es evidente que el cuadrado pertenece a mi familia.

Tiene los cuatro lados iguales y los ángulos opuestos son iguales entre sí. ¿Pero qué dices? Te has vuelto loco. El cuadrado es un miembro de mi familia, la de los rectángulos.

Observa que entre sus títulos principales se encuentran tener los cuatro lados paralelos dos a dos y los cuatro ángulos rectos. Eso no es cierto. Nos queréis quitar a uno de nuestros congéneres y sabéis, además, no pretendáis disimularlo, que posee nuestras características.

¡Basta ya! ¡No me pongáis la cabeza como un círculo! Os aclararé que soy un cuadrado y que pertenezco a las dos familias. Mi madre era Rombo y mi padre Rectángulo. ¿No me creéis? ¿Cómo podría yo...? ¡Ah, sí! Vamos a dar un paseo por nuestro país y en aquel lugar en el que encontremos una audiencia imparcial, realizaremos unos ejercicios que os demostrarán que pertenezco, y con todas las garantías, a las dos familias.

Mas no utilizaré los títulos familiares que habéis invocado ambos. Procuraré fundamentar mi afirmación de forma más dinámica. Con sorpresa, vi que los tres se desplazaban por el plano hasta llegar a una plaza cuadrangular, en cuyos soportales había unos seres poco parecidos a ellos.

En un lado había pentágonos, en otro triángulos, en otro círculos, y por último, en el que quedaba libre, el ipses. Tu Rombo. Rombo, colócate aquí, a mi izquierda.

Y tu rectángulo, a mi derecha. ¿Qué murmuras tú, Rombo? Nada, nada. Que mi vértice de arriba está junto a los triángulos.

El de abajo, junto a los pentágonos. El de la izquierda, junto a los círculos. Y el de la derecha, junto al cuadrado.

¿Cómo estás tu rectángulo? Bien. A mi izquierda tengo al cuadrado. Y más lejos estás tú, Rombo.

Y los círculos. A mi derecha hay elipses. Encima están los triángulos, y debajo los pentágonos.

¿Y tú, cuadrado? Mi situación es parecida a la del Rombo. Mi vértice superior está al lado de los triángulos. El inferior, junto a los pentágonos.

Los círculos, hacia mi vértice izquierdo. Más allá del Rombo, y cerca del lado izquierdo del rectángulo, está mi vértice derecho. Pero, empecemos a hacer los ejercicios de los que os hablaba.

Comenzaremos por los más fáciles. Sujetémonos bien a nuestro centro, y a continuación realicemos los movimientos que yo vaya diciendo. ¿Preparados? Sí, estamos listos.

Giro de 90 grados. Los tres personajes giraron, teniendo fijo el centro, un ángulo de 90 grados. El cuadrado ocupó el mismo sitio de antes, pero no así el Rombo ni el rectángulo.

El primero de estos dijo… ¡Fascinante! Mis vértices han cambiado todos de posición. Por ejemplo, el que antes estaba frente a los triángulos, ahora tiene en frente a los círculos. ¿Cómo has quedado tu rectángulo? ¡Fastidiado! Mis lados ya no están en la misma posición que antes.

Así, el pequeño, que antes estaba junto a las elipses, ahora tiene en frente a los aburridos triángulos. Fijaos, sin embargo, en mí. He cambiado mis vértices y mis lados de posición, pero ocupo el mismo lugar que antes, y eso no os ocurre a vosotros.

Hagamos ahora otro giro de 90 grados. ¡Ya! Estamos donde estábamos al principio. Sí, pero nuestros vértices y lados han vuelto a cambiar de posición.

Lo mismo me ha ocurrido a mí. Luego, ya tengo en común con vosotros dos el que un giro de 180 grados, apoyándonos en el centro, nos deja en el lugar que estábamos al principio, aunque cambien de posición nuestros lados y vértices. Primer dato que indica que pertenezco a ambas familias.

¿Y si hiciéramos, a partir de la posición en que estamos, otro giro de 90 grados? Hagámoslo, a ver qué ocurre. Ya vuelvo a estar fuera de mi sitio, y además, todos mis lados han vuelto a cambiar de posición. Cada vez es más interesante.

Yo tampoco estoy en el lugar de antes, y mis vértices también han cambiado su posición. ¿Qué te pasa a ti, cuadrado? Yo sigo estando en el mismo lugar, aunque mis lados y vértices cambien de posición. Atención a la orden siguiente.

Giro de 90 grados. Vaya, qué alivio. Por fin estamos otra vez como al principio.

Efectivamente. Ocupamos el mismo lugar, y nuestros lados y vértices están en la misma posición que al comenzar. ¿Eso te ha ocurrido a ti? ¡Claro! Aquí veis otra característica que tengo en común con ambos.

A todos, un giro de 360 grados nos deja en el mismo sitio y en la misma posición que teníamos al comenzar. ¿Y qué más? Solo tienes esas dos características en común con nosotros. No, que va.

Ahora efectuaremos los movimientos más interesantes y peligrosos. Para realizarlos, tenemos que dejar inmóvil sobre el plano la parte que yo nombre y mover todo lo demás. Por ejemplo, cuando yo diga, simetría de eje una diagonal, dejáis fija esa diagonal y moveis el resto.

Ánimo, hagámoslo ahora. Simetría de eje una diagonal. He pasado por un mundo desconocido.

Pero, ¿qué ocurre? No estoy donde antes. Solo noto en el mismo sitio la diagonal alrededor de la que he girado y los vértices que están en sus extremos. Además, estoy al revés.

Maravilloso. Hemos visitado durante segundos un nuevo mundo. Sigo ocupando el mismo lugar y solamente la diagonal alrededor de la que he hecho el movimiento está en la misma posición que antes.

Pero, si estoy en la otra cara del plano... Mira por dónde esta característica me liga solamente a ti, Rombo, pero no al rectángulo. Yo ocupo el mismo lugar, pero únicamente está en la posición anterior la diagonal alrededor de la que he hecho el movimiento y sus vértices correspondientes. Yo también veo la cara oculta del plano.

Pero, volvamos atrás, si no al rectángulo le va a dar algo. Está lleno de terror. Simetría de eje la misma diagonal.

Uff, ya estamos otra vez como al principio. Pero, ¿qué ocurrirá si digo simetría de eje la otra diagonal? Hemos vuelto a visitar la otra cara del plano, aunque yo sigo ocupando el mismo lugar. Si bien todo ha cambiado su posición, excepto la diagonal alrededor de la que he realizado el movimiento.

He aquí otra característica que me liga solo a ti, Rombo. A mí me ha ocurrido lo mismo. Y a ti, rectángulo.

¿Qué quieres que me ocurra? No lo aguanto. Yo sigo fuera de mi lugar. Solo está en el mismo sitio esta diagonal a partir de la que he hecho el movimiento.

Pero es que, por otra parte, me da miedo esa cara del plano y el extraño mundo por el que hemos pasado. ¿Por qué diría yo simetría alrededor de esa diagonal? Nada más decir esto, los tres volvieron a moverse y se quedaron en el mismo lugar que al comienzo de sus ejercicios. ¿Qué mundo daba tanto pavor al rectángulo y entusiasmaba al Rombo en los pocos instantes que duraban estos movimientos? ¿Cómo será la otra cara del plano? Sigamos de momento con

los protagonistas de nuestra historia.

No te preocupes, rectángulo. Ya solo vamos a hacer dos movimientos más. ¿Qué ocurrirá si ahora digo simetría de eje una de las dos rectas que pasan por los puntos medios de dos lados paralelos? Fantástico.

He cambiado de lugar. He visitado ese otro mundo que sigue siendo fascinante. Estoy de nuevo en la otra cara del plano.

Y solo está en la misma posición que antes el eje que ha dicho el cuadrado. Menos mal, sigo en el mismo lugar. ¿Pero qué veo? Otra vez en esta cara extraña del plano.

¿Y ahora qué recuerdo? He vuelto a pasar por ese mundo insólito. Me consolaré pensando que ese eje del que habláis también en mí permanece invariante, si bien ha cambiado todo lo demás. ¿A quién te pareces ahora, cuadrado? En esto me parezco a ti, no al rombo, ya que no he cambiado de lugar.

Volvamos otra vez al principio. Simetría del mismo eje. Una vez aquí ya sé lo que vas a decir.

Simetría de eje la otra recta que pasa por los puntos medios de los lados paralelos. Señor, lo aguanto porque dices que ya es el último y además porque continúo ocupando el mismo lugar, por más que todo haya cambiado en mí, excepto este eje. Eso mismo me ha ocurrido a mí, y te fijas, los dos estamos en la otra cara del plano.

En esto tengo que reconocer que eres de la familia rectángulo, pues yo he cambiado de lugar totalmente al realizar este movimiento, excepto en el eje alrededor del que lo he realizado. Después de realizar otra vez este último movimiento para volver a la posición inicial, los tres se habían puesto de acuerdo en que el cuadrado pertenecía a ambas familias, pero que además tenían ciertos lados en común. Los tres volvían a sus respectivas posiciones iniciales después de realizar giros de 180 y 360 grados.

Por otra parte, al rombo y al cuadrado les ocurría lo mismo con las simetrías de ejes ambas diagonales, mientras que las simetrías de los otros ejes mencionados emparentaban entre sí al rectángulo y al cuadrado. Más, silencio, hablan otra vez. Ahora es el rectángulo.

Os digo que pertenezco a una familia muy numerosa. Es la familia paralelogramo, que tiene en común con nosotros los rectángulos el paralelismo entre lados opuestos, aunque no haya alcanzado la perfección de que sus ángulos sean rectos. Sin embargo, la familia romboide a la que pertenezco guarda conmigo la característica de tener los ángulos opuestos iguales dos a dos, aunque no tenga, como nosotros los rombos, los cuatro lados iguales.

Vamos a visitar a algún miembro de esas familias que decís, porque no creo en esos parentescos hasta que se demuestre con alguna prueba menos estática. Las tres figuras se fueron deslizando de nuevo por el plano. Pero, atendamos, porque el rombo se dispone a hablar.

Mirad, por ahí viene un miembro de la familia romboide. Vamos a someterlo a esa prueba. Pero, ¿qué dices? Es un miembro de la familia paralelogramo.

Eso salta a la vista. Un momento. A la vista está que tiene las características que ambos indicáis para la pertenencia a esas familias.

Por favor, señor romboide. Sí, dígame, ¿qué desea? Estamos investigando cuál es el tronco común de nuestras familias y quisiéramos someterle a una prueba, ya que el rectángulo dice que usted es uno de sus ascendientes y que pertenece a la familia paralelogramo, mientras que el rombo opina que usted pertenece a la familia romboide, de la que él también es miembro. Al llamarme señor romboide, les he respondido.

Pero lo mismo habría hecho si me hubiesen llamado señor paralelogramo. En realidad, se me pueden aplicar con propiedad ambas denominaciones. Y como el asunto me interesa, me someto gustoso a lo que deseen.

Nuestros protagonistas se afanaban por explicar al romboide en qué iba a consistir la prueba, en que hiciera los ocho movimientos que ellos habían realizado con el fin de observar en cuáles de ellos se producían los mismos efectos que habían observado con anterioridad. Bien, lo he entendido perfectamente. Vamos a ello.

El romboide, o paralelogramo, realizó uno tras otro los ocho movimientos. Escuchemos las conclusiones que sacaron. Con dos de los cuatro movimientos, el giro de 180 grados y el de 360 grados alrededor del centro, le ha ocurrido lo que a ti, rombo, se ha quedado invariante.

Sí, efectivamente. También yo he observado lo mismo con respecto a los movimientos que te dejaban invariante a ti. Luego, esos dos únicos movimientos que nos dejaban invariantes a los tres son realmente un rasgo común en la familia.

Precisamente por ello, todos estamos emparentados. ¿Usted qué opina, señor romboide? Os confieso que me he divertido mucho con los movimientos que he realizado. Y me alegra saber que tengo unos descendientes tan perfeccionados como vosotros.

Y perdonad el tuteo, pero sois más jóvenes que yo. Continuemos los cuatro investigando sobre nuestra familia. Acompañadme ahora a visitar a un amigo, el trapecio.

Observé entonces cómo los cuatro personajes se desplazaban hasta una zona del plano en la que había varios individuos. El romboide se adelantó a los demás y dijo... Ya que todos son de la familia trapecio, llamemos a uno cualquiera de ellos. A ese que conozco bien.

Eh, tú. ¿Quién? ¿Yo? Ah, hola. No te había conocido.

¿Qué quieres? Ven, ven, acércate, por favor. Te presento a estos amigos que desean proponerte algo. Estoy a vuestra disposición.

Todos fueron explicando al trapecio lo que pretendían, y aunque en principio se mostró un

poco reacio a someterse a tantos movimientos, terminó aceptando. Se alejó un momento de ellos y volvió con otro compañero. Este es uno de mis hermanos.

Se llama simplemente Trapecio. Mi nombre es, en verdad, Trapecio Isósceles, puesto que mis dos lados no paralelos son iguales. Sin embargo, en él podéis observar que aunque tiene dos lados paralelos, todos sus lados son desiguales.

Además, es mudo. Bien. Vamos a ver qué ocurre con vosotros si os aplicamos esta prueba.

Después de aplicar los ocho movimientos a ambos, observaron que únicamente permanecían en el mismo lugar del plano mediante un movimiento, el giro de 360 grados alrededor del centro. Esa característica la habían ido transmitiendo a los demás. Todos permanecemos invariantes por este giro de 360 grados.

Pero creo que no nos hemos fijado mucho, porque ¿en qué se diferencian, pues, los dos trapecios? Si recordamos, el Trapecio Isósceles, además de por ese movimiento, quedaba en el mismo lugar después de hacer la simetría de eje, la recta que pasa por los puntos medios de los lados paralelos. Eso quiere decir que yo, el Trapecio Isósceles, pertenezco a la familia Trapecio por dejarme invariante el giro de 360 grados. Pero, ¿añade algo nuevo el que quede en el mismo lugar, aunque cambien casi todos mis puntos después de una simetría del citado eje? Desde luego.

Ello indicará que nosotros, los romboides, no descendemos de ti, ya que ese movimiento nos cambia de lugar. De todas formas, pienso que tenéis algo en común. Nosotros, los rectángulos, somos romboides, como vimos antes, pero también somos Trapecios Isósceles, ya que nos ocurre lo mismo que a estos con los dos movimientos que los dejaban invariantes.

En cambio, los rombos sólo tendremos en común con el Trapecio Isósceles a nuestro pariente, el cuadrado. Algo ocurría. El Trapecio Mudo intentaba comunicarse con su hermano por medio de golpes con uno de sus vértices.

Oigamos la traducción que hizo éste. Me está indicando que olvidamos a alguien, al cuadrilátero convexo del que todos descendemos. El Trapecio Mudo se desplazó por el plano alejándose de ellos y volvió con un personaje que, como único rasgo común con todos, mostraba cuatro lados.

Se apresuraron a contarle lo que se traían entre vértices y él aceptó de muy buen grado pasar el examen. Al terminar, dijo, estoy fatigado. Habréis comprobado que únicamente el giro de 360 grados me deja invariante.

Está claro, pues, que todos descendéis de mí. Una vez escuchado el guión, les proponemos una actividad relacionada con lo aquí tratado. Representen mediante diagramas de Edén los diversos subconjuntos de los cuadriláteros convexos.

Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org