EGB 8 10

El espacio del Programa Nacional de Especialización y Perfeccionamiento del Profesorado de Educación General Básica del día de hoy trata de matemáticas. Les vamos a ofrecer un tema sobre la División Euclidea, cuyos autores son las profesoras María del Carmen Chamorro y María Esperanza Garijo, junto con don Francisco Vecino. Un nutrido número de alumnos de tercer y cuarto nivel presentan una gran dificultad en la adquisición de los mecanismos básicos de la división.

De ahí que se produzca una deficiente automatización que lleva a errores frecuentes en el cálculo, o bien una automatización que no ha sido precedida de un periodo de comprensión, lo que impide al alumno distinguir las características de la división. Nos encontramos así con dos grupos de alumnos que presentan anomalías de tipo numérico, los que cometen muchos errores al dividir y los que no saben resolver elementales problemas de reparto a pesar de calcular bien. Nos proponemos mostrar un modelo didáctico encaminado a hacer comprensible al alumno el mecanismo de la división y su caracterización como operación inversa de la multiplicación.

Asimismo, mostraremos la progresión a seguir para llegar de la comprensión a la automatización. Los cuestionarios oficiales citan la iniciación a la división en tercer nivel y su automatización en cuarto nivel, pero con anterioridad a estos niveles, los niños realizan agrupamientos de un número fijo de elementos y hacen particiones de conjuntos. A partir de estas actividades puede comenzarse en primer nivel una pequeña iniciación a la división.

Se parte de un conjunto de bolas, por ejemplo 44, y se pide a los niños que formen subconjuntos equipotentes, es decir, subconjuntos con el mismo número de bolas, 7 por ejemplo. Se formarán seis grupos de siete bolas y sobrarán dos bolas. Este tipo de actividades serán aprovechadas en segundo nivel cuando los niños conozcan ya la escritura multiplicativa para expresar numéricamente los resultados obtenidos por manipulación.

La experiencia anterior de que con 44 bolas pueden formarse seis grupos de siete bolas y sobran dos puede escribirse así, 44 igual a 7 por 6 más 2. Aparece ya aquí la noción de división con resto distinto de cero, 2 en este caso. Antes de seguir adelante, quisiéramos hacer unos comentarios sobre las nomenclaturas que algunos libros y profesores utilizan. Hablan de división exacta y división no exacta para referirse respectivamente a las divisiones con cociente entero y resto cero y las de cociente entero y resto distinto de cero.

Toda división bien hecha, sin errores, es exacta. Solo son no exactas las que están mal hechas. La nomenclatura correcta es división entera para las divisiones de cociente entero y resto cero y división no entera para las de cociente entero y resto distinto de cero.

Si en la división no entera se da el cociente y se prescinde del resto, dicho cociente recibe el nombre de cociente euclideo y la división se llama euclidea. Así, por ejemplo, el cociente

euclideo de 46 entre 8 es 5, el de 29 entre 7 es 4, etc. Cuando quiera indicarse que la división que se efectúa es euclidea, se pondrá una raya horizontal entre los dos puntos que indican división.

Así se escribirá 46 dos puntos con raya en medio 9 igual a 5 y se leerá el cociente euclideo de 46 entre 9 es igual a 5. Conviene hacer también una batización sobre la terminología de restos y cocientes por exceso y defecto. Se dice a menudo que 50 entre 7 da cociente por defecto 7 y 1 de resto por defecto. Lo correcto es decir que 50 entre 7 da 7 como cociente por defecto y 1 de resto por exceso, ya que 7 por 7 son 49 y tenemos 50.

En consecuencia nos sobra 1 y de ahí el nombre de resto por exceso, ya que el dividendo excede en una unidad a 7 por 7. Al dividir 50 entre 7 puede tomarse también 8 como cociente y resto menos 6. Suele decirse erróneamente que 8 es el cociente por exceso y 6 el resto por exceso. En realidad 8 es el cociente por exceso mientras que 6 es un resto por defecto, ya que 8 por 7 son 56 y nuestro dividendo es sólo 50. Tenemos pues un defecto de 6 unidades, de ahí que el resto se deba llamar por defecto.

Obsérvese además que la suma en valor absoluto de los restos por exceso y defecto es siempre el divisor. En el caso anterior 1 más 6 da el divisor 7. En segundo nivel es aconsejable la utilización de cadenas de operadores aditivos y subtractivos para la realización de divisiones sencillas, no sólo porque permite relacionar todas las operaciones elementales, sino lo que es más importante, porque en la automatización de la división que normalmente todos utilizamos, aparecen, aunque de forma muy enmascarada, mecanismos de este tipo. Es imprescindible al principio desglosar uno a uno todos los mecanismos que aparecen en la división, si queremos que el niño comprenda el porqué de lo que hace en cada momento.

Una manera de dividir 44 entre 7 es la siguiente. Partiendo del número 0 como salida, aplicamos el operador más 7 de forma sucesiva. Obtenemos así la siguiente cadena.

0, 7, 14, 21, 28, etc. ¿Cuántas veces debemos hacer actuar el operador más 7? Las necesarias para aproximarnos lo más posible al dividendo que es 44. En este caso, la cadena completa sería 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42.

Al llegar al 42 podemos pararnos o bien continuar hasta el 49. Si nos paramos en el 42, necesitaremos usar el operador más 2 para llegar a 44. Si llegamos hasta 49, tendremos que utilizar el operador menos 5 para llegar al 44.

En el primer caso, una expresión abreviada de lo hecho se obtiene así. Contamos las veces que hemos aplicado el operador más 7, han sido 6, y después ha actuado más 2. Con todo ello hemos llegado al 44. Lo expresamos así, 44 igual a 7 por 6 más 2. Es decir, 7 está contenido 6 veces en 44 y sobran 2 unidades.

Por tanto, 44 entre 7 da 6 de cociente por defecto y 2 de resto por exceso. Si hemos seguido la secuencia que lleva al 49, el número de veces que hemos usado el operador más 7 es 7, y

después hemos usado el operador menos 5. Esto puede expresarse así, 44 es igual a 7 por 7 menos 5. En este caso, 7 es el cociente por exceso y 5 el resto por defecto. Otro posible camino es la utilización de una cadena de operadores sustractivos, partiendo como número de salida del dividendo hasta llegar a cero.

Continuando con el ejemplo anterior, partimos de 44 y aplicamos el operador menos 7 el número de veces necesarias. La cadena resultante será 44, 37, 30, 23, 16, 9, 2. Aquí se ve claramente la imposibilidad de llegar a cero usando solo el operador menos 7, lo que nos indica que la división no va a ser entera. Partiendo de 44, hemos usado 6 veces el operador menos 7 para llegar a 2. Numéricamente lo expresamos así, 44 menos 7 por 6 igual a 2. Como antes, 6 es el cociente por defecto y 2 el resto por exceso.

Obsérvese que tanto en el caso de los operadores aditivos como en el de los sustractivos, se procede buscando el múltiplo del divisor que está más próximo al dividendo. Lo que ocurre es que ese múltiplo lo obtenemos por adiciones o sustracciones repetidas. Después de practicar los dos tipos de cadenas, se está en condiciones de hacer una primera aproximación a la técnica clásica de la división.

Para dividir 44 entre 7, situamos 44 y 7 en la disposición habitual con la caja de dividir. Ahora procedemos como sigue. Colocamos en el cociente un 1 y debajo del 44 un 7 con un menos de restar delante.

Esto significa que hemos utilizado una vez el operador menos 7. Restamos y queda 37 en el dividendo. En el cociente volvemos a poner un 1 con un más delante, que significa que usamos una vez más el operador menos 7. Volvemos a restar 7 a 37, quedando 30 en el dividendo. Continuamos el proceso hasta que el dividendo es un número inferior a 7. Después basta con sumar los unos del cociente, el resultado de esa suma es el cociente por defecto de la división.

En este caso habría 6 unos, el cociente sería por tanto 6. El último resultado de las sustracciones, que es 2, es el resto por exceso. Vamos a describir ahora una técnica que permite determinar el cociente euclidio de dos números naturales basándose en la propia definición de cociente euclidio. La definición dice así.

Si q es el cociente euclidio de a entre b, esto significa que b por q es menor o igual que a, menor estrictamente que b por q más 1. Repitamos de nuevo la definición de cociente euclidio. Decía así. Si q es el cociente euclidio de a entre b, esto significa que b por q es menor o igual que a, menor estrictamente que b por q más 1. Es decir, para encontrar el cociente euclidio de a entre b es necesario encuadrar el dividendo que es a entre dos múltiplos sucesivos del divisor que es b. b por q y b por q más 1 son estos múltiplos.

Ese número q recibe el nombre de cociente euclidio de a entre b. Se trata, por tanto, de poner de manifiesto el hecho de que la división es la operación inversa de la multiplicación y, sirviéndose de ello, hallar el cociente utilizando tan solo la multiplicación. Para realizar esta actividad se requiere únicamente que los niños conozcan la tabla de multiplicar. El nivel

adecuado para ello es el de tercero o cuarto.

Sería también conveniente que los alumnos hubiesen utilizado previamente los operadores multiplicativos. Sobre este punto concreto le revitimos al libro de ese mismo título, de Dienes, que figura en la bibliografía de la guía de trabajo. Vamos a comenzar por un ejemplo sencillo.

Se trata de hallar el cociente euclidio de 69 entre 8. Disponemos para ello la tabla de multiplicar por 8 de la siguiente forma. En una línea horizontal colocamos el multiplicando 1, 2, 3, 4, 5, etc., y justamente debajo los resultados de multiplicar por 8. Es decir, 8, 16, 24, 32, 40, etc. Un esquema como este figura en la página 94 de la unidad didáctica número 3, Estructura de módulo.

Ahora todo se reduce a buscar dos múltiplos sucesivos de 8 entre los que encuadrar el dividendo que es 69. Con una simple lectura directa de la tabla se aprecia que 69 está entre 64 y 72. Puede escribirse entonces 64 menor que 69 menor que 72.

Pero 64 procede de 8 por 8 y 72 de 8 por 9. Se escribe entonces 8 por 8 menor que 69 menor que 8 por 9. Aplicando ahora la definición de cociente euclidio, el Q que buscamos es 8. Así pues, 69 cociente euclidio 8 es 8. Pasaremos después a otro tipo de divisiones en los que es necesario aplicar propiedades de la multiplicación para hallar el cociente euclidio. Es decir, no basta con efectuar una lectura directa de la tabla como en el caso anterior. Vamos a ver ahora el caso de un dividendo de tres cifras y un divisor de una sola cifra.

Busquemos el cociente euclidio de 291 entre 4. Como antes, escribimos la tabla de multiplicar por 4 y el número más grande que aparece es 40. Si el niño ha estudiado algunas propiedades de la multiplicación, en concreto la multiplicación por un número terminado en cero, no es difícil deducir un pedazo de la tabla de multiplicar más avanzado, en concreto el siguiente. En la primera línea, 60, 70, 80, 90, y debajo, los resultados de multiplicar por 4, 240, 280, 320, 360, obtenidos de la primera tabla sin más que añadir un cero al multiplicando.

Nuestro dividendo, 291, se encuentra situado entre 280 y 320. Y puede escribirse que 280 es menor que 291 menor que 320. Pero 280 procede de 4 por 70 y 320 de 4 por 80.

Sustituyendo queda 4 por 70 menor que 291 menor que 4 por 80. Esto nos indica que la cifra de las decenas del cociente va a ser 7. ¿Cómo averiguar la cifra de las unidades? El cociente se encuentra entre 70 y 80. Si queremos averiguar la cifra de las unidades, debemos detallar el pedazo de la tabla de multiplicar que hay entre 70 y 80.

Formamos, pues, la tabla siguiente. 70, 71, 72, 73, etc. Y debajo, los productos respectivos por 4. 280, 284, 288, 292.

Ya no es necesario continuar, ya que el dividendo 291 se encuentra entre el 288 y el 292. Escribimos ahora, 288 menor que 291 menor que 292. Que proceden de 4 por 72 menor que 291 menor que 4 por 73.

Por tanto, el cociente euclidio de 291 entre 4 es 72. Remarquemos, por último, que esta técnica es general y sirve cualquiera que sea el número de cifras del divisor. Si el divisor es 32, hay que formar la tabla de multiplicar del 32.

Si fuera 215, la del 215. Y así en cada caso. Con lo visto anteriormente, podemos hacer una aproximación a la técnica clásica de la división.

Calculemos, por ejemplo, el cociente euclidio de 642 entre 23. Preparamos para ello el pedazo de la tabla del 23 siguiente. 10, 20, 30 y debajo, 230, 460, 1150.

El número más aproximado a 642 es el 460. Podemos efectuar, por tanto, 642 menos 460 y nos dará 182. Ahora, el múltiplo de 23 más próximo a 182 es el 115.

Podemos también restar 115 a 182 y obtenemos 67. El múltiplo de 23 más cercano a 67 es 46 y al restar da 21, que ya es inferior a 27. 460 es 20 por 23, 115 es 5 por 23 y 46 es 2 por 23.

Es decir, hemos restado 20 más 5 más 2, en total 27 veces el 23, con lo que 27 es el cociente euclidio. Lo anterior puede disponerse prácticamente de la siguiente manera. Formamos una cadena de operadores sustractivos partiendo de 642, que es el dividendo, y hacemos actuar a los operadores menos 460, menos 115 y menos 46 de forma sucesiva.

Se obtiene así la secuencia 642, 182, 67 y 21. En el paso siguiente sustituimos 460 por 20 por 23. 115 por 5 por 23 y 46 por 2 por 23, todo ello en la cadena de operadores que actúan partiendo del 642.

Trasladamos estos resultados a la forma clásica de dividir y colocamos 642, la caja de dividir y 23 en ella, como lo hacemos habitualmente. En el cociente pondremos en primer lugar 20, ya que es el primer múltiplo de 23 que restamos. Debajo del 642 aparecerá ahora menos 460, que es el múltiplo de 23 restado.

Efectuada la resta nos da 182. En el cociente debe aparecer ahora más 5, ya que ahora restaremos al 182 el 115, que recordemos es 5 por 23. Efectuada la resta el resultado es 67.

El siguiente número del cociente será más 2, pues vamos a restar 46, que es 2 por 23. Como el resultado de la última resta es 21, que ya es inferior al divisor, la división ya ha finalizado. Ahora basta con sumar los números del cociente, 20 más 5 más 2. La suma, que es 27, es justamente el cociente euclidio de 642 entre 23.

Resumamos todo lo anterior. La progresión adecuada a nuestro juicio sería la siguiente. Servirse de la manipulación en preescolar y primer nivel para realizar agrupamientos de un número fijo de elementos y particiones de conjuntos.

En segundo nivel, practicar con cadenas de operadores aditivos, introduciendo a continuación cadenas de operadores subtractivos como operadores opuestos de los anteriores. Practicar a continuación los dos caminos posibles, del cero al dividendo y del dividendo a cero. En tercer

nivel, introducir los operadores multiplicativos, deducir pedazos de la tabla de multiplicar más avanzados, sin más que añadir un cero al producto si se añade un cero al multiplicando.

En cuarto nivel, introducir la definición de cociente euclidio y practicar con dividendos de dos o tres cifras y divisores de una o dos cifras. Por último, hacer una aproximación a la técnica clásica de la división para terminar con la práctica habitual. Esperamos que este modelo didáctico le sea útil especialmente a los profesores que imparten primera etapa y a los que, en segunda, se encuentran con alumnos que llegan a estos niveles sin haber conseguido un dominio de las técnicas instrumentales del cálculo elemental.

Un saludo a todos, muy buenas noches. En matemáticas del PRONEP EGB han escuchado la división euclídea. Les han hablado los profesores María del Carmen Chamorro, María Esperanza Garijo y Francisco Vecino.