Gracias. Gracias.

El tema de hoy persigue un doble objetivo. Por una parte, reforzar la idea de grupo que ha sido desarrollada en la unidad didáctica número uno. Para ello se ha buscado un juego didáctico, de forma que la exposición y desarrollo que vamos a hacer puedan ser aplicados tal cual a los alumnos de la segunda etapa. El segundo objetivo es pues eminentemente didáctico. Vamos a preparar nuestro material.

Tenemos papel y lápiz y seis bloques lógicos, dos cuadrados, dos triángulos y dos círculos, unos rojos y otros azules. Tenéis un conjunto de seis bloques que vamos a llamar B. ¿Qué elementos forman el conjunto B? Bien, un cuadrado rojo, un cuadrado azul, un triángulo rojo, un triángulo azul, un círculo rojo y un círculo azul. Bien, vamos a definir ahora dos operadores sobre el conjunto B que está formado por los seis bloques lógicos acabados de enumerar. El primer operador cambia el color sin cambiar la forma. Por eso vamos a llamarle cero. C, inicial de color.

¿Cómo cambiará C nuestros bloques? Es muy sencillo. Como sólo hay dos colores, los bloques rojos se transformarán en azules y los azules en rojos. No debemos preocuparnos de la forma porque C cambia el color sin variar la forma. Así que, repito, los rojos cambiarán a azules y los azules a rojos. El segundo operador cambia la forma sin cambiar el color. Le llamaremos F, inicial de forma. Pero ahora tenemos tres formas. ¿Cómo sabremos entonces si el triángulo, por ejemplo, cambia al cuadrado o al círculo? Tienes razón. Si sólo os dijese que cambia la forma sin precisar nada más, cada uno podría hacer una cosa distinta, porque hay más que una. Hay más que una posibilidad. Un cuadrado podemos...

transformarlo en un círculo o en un triángulo, y lo mismo ocurriría con todos los demás bloques. Es necesario, pues, que nos pongamos previamente de acuerdo en la manera de actuar de F. Bastará con que escojamos una de entre todas las posibilidades. Pero eso sí, una vez fijada, ya no podremos cambiarla. De todas las posibilidades, vamos a elegir, por ejemplo, la siguiente. F cambia círculo por cuadrado. F cambia cuadrado por triángulo. Y F cambia triángulo por círculo. Anotadlo en vuestro papel. Así pues, decidme, ¿en qué se convertirá el cuadrado azul si lo cambiamos?

le aplicamos F. Como F sólo cambia la forma, el bloque resultante seguirá siendo azul. Y como un cuadrado pasa a ser un triángulo, tendrá que darnos el triángulo azul. Sí, eso es, el cuadrado azul se transforma por F en el triángulo azul. Bien, ahora una pregunta más difícil. Si al círculo rojo se le aplica F y al resultado obtenido le aplicamos otra vez F, ¿qué bloque tendremos al final? El círculo rojo cambia por F al cuadrado rojo y el cuadrado rojo pasa al triángulo rojo al aplicar otra vez F. Entonces, dime tú misma, ¿en qué se transforma el círculo rojo al aplicar dos veces seguidas F? El círculo rojo se transforma aplicando dos veces F en el triángulo rojo.

Pensad un momento si se podría haber pasado del círculo rojo al triángulo rojo aplicando únicamente el operador C o el operador F. C cambia el color y obtendríamos un bloque azul. Y sin embargo el que tenemos sigue siendo rojo. Y con F, que cambia la forma, pasaríamos a un cuadrado pero no a un triángulo. No, no es posible. Como veis el cambio que hemos hecho no es posible usando únicamente C o únicamente F. Por eso aplicar dos veces F es un operador distinto de los que ya teníamos. Le daremos un nombre, por ejemplo FF para indicar que

hemos aplicado dos veces F. ¿Y si hacemos actuar a C y después a F nos dará también un operador distinto? Probad cada uno a ver.

transformar un bloque distinto. Aplicad C y después F y luego observaremos los resultados. Yo he tomado el círculo azul y al aplicar C y después F he llegado a un cuadrado rojo. Veo que ha cambiado a la vez el color y la forma del bloque que había tomado y eso no hubiera podido hacerlo con ninguno de los operadores anteriores. Expliquemos entonces por qué no se puede hacer con los operadores que ya teníamos. Si tomo F, sólo cambia la forma, pero no el color. FF cambia dos veces la forma, pero el color sigue siendo el mismo. Y C cambia el color, pero no cambia la forma. Ninguno sirve porque he cambiado las dos cosas a la vez. Hemos encontrado entonces un operador nuevo, pero no sé cómo llamarlo. ¿CF o FF? FF.

Como has cambiado primero el color y después la forma, debemos llamarlo FC. Recuerda que siempre que componemos aplicaciones, escribimos en orden inverso a cómo actúan. Entonces, si el anterior se escribe FC, el que se escriba CF, que cambiará primero la forma y después el color, ¿puede ser otro operador distinto del FC? Podemos averiguarlo enseguida. Tomad otra vez el mismo bloque de antes. Aplicad ahora primero F y después C. Es verdad, da lo mismo. Si aplico F, el círculo azul pasa a un cuadrado azul, y al aplicar C, obtengo un cuadrado rojo, igual que antes. Os ha ocurrido lo mismo a todos. Entonces es lo mismo CF que FC. Es decir...

Son el mismo operador, ya que ambos actúan de la misma forma sobre todos y cada uno de los bloques de B. Aplicad ahora F, F, F. ¿Qué observáis? Pues que se tome el bloque que se tome siempre queda igual. Cambiar tres veces la forma es no hacer nada. ¿Es un operador nuevo? Pero todos los que teníamos cambiaban algo y este no. Sí, se trata de un nuevo operador que efectivamente no cambia nada. Podemos llamarlo entonces N, inicial de nada, para recordar que transforma cada bloque en sí mismo, es decir, lo deja como estaba. Yo he observado que si aplico dos veces C tampoco cambia nada, porque... Si cambio rojo por azul por C y luego azul por C, ¿qué pasa?

por rojo, también por C, vuelvo a obtener rojo. Por eso, CC es también N. Eso es. Por tanto, tenemos hasta ahora los siguientes operadores. F, C, FF, CF y N. ¿Pero existirán más? Para averiguarlo, vamos a hacer todas las composiciones posibles con los operadores que ya tenemos. Con el fin de anotar los resultados de forma ordenada, confeccionemos una tabla de doble entrada. Disponed los operadores en este orden. C, F, FF, CF. C, F, FF, CF y N. Va a ser muy largo. Podemos abreviar.

mucho si nos acordamos de que FFF es igual que CC igual a N. Por tanto, tres Fs o dos Cs se pueden sustituir por N. Y como N no cambia nada, cualquier operador IN nos va a dar siempre ese operador. Tiene razón. Además, sabemos también que CF y FC son lo mismo. Aprovechad pues todas estas observaciones y rellenad la tabla. A esta tabla le llamaremos tabla primera. Recuerde que la tabla primera se encuentra en la nota que ha recibido. Vamos a observar la tabla primera. Vamos a observar esta tabla primera.

¿Encontráis en ella algún operador distinto de los que ya teníamos? Sí, hay uno nuevo, el CFF. Entonces, tenemos hasta ahora seis operadores. C, F, FF, CF, N y CFF. Pero tengo una duda, ¿existirán todavía más? Vamos a verlo. Componed unos con otros estos operadores, igual que hicimos antes, y disponed los resultados

en otra tabla de doble entrada, que llamaremos tabla segunda, siguiendo este orden. C, F, FF, CF, CFF y N.

La tabla segunda también está completa en la nota citada. Y ahora, escribid, por favor, los resultados para que vuestros compañeros los vayan comparando con los que ellos han obtenido. Sí, a mí me da lo mismo también. Observemos ahora esta tabla segunda. ¿Hay en ella algún operador que no tuviéramos antes? No, todos los resultados han sido operadores que ya teníamos. Como veis, los operadores que hemos definido al principio, F y C, han generado, al componerse varias veces unos con otros, nuevos operadores. En un principio encontramos CF, FF y N. Y después, con la tabla... La tabla primera.

aparecía un nuevo operador, CFF. Tenemos en total un conjunto de seis operadores para transformar los bloques de B. Y sabemos que no hay más, pues de lo contrario, hubieran aparecido en la tabla segunda que acabáis de hacer. Vamos a llamar G al conjunto formado por esos seis operadores que hemos encontrado, como C, F, FF, CF, N y CFF. Además veo que todas las casillas de la tabla segunda están rellenas. No hay ningún hueco. Como ya sabéis, eso quiere decir que la composición de operadores es una ley interna en el conjunto G. Siempre podemos componer dos operadores de G y el resultado será también un operador perteneciente a G. Tomada ahora la teoría,

tres operadores cualesquiera, por ejemplo, F, CF y CFF, y haced lo siguiente. Componed F con CF. ¿Qué os da? C, F, F. Componed ahora el operador que os ha salido con C, F, F. El resultado es... F. Vamos a componer esos tres operadores elegidos, F, CF y CFF, pero ahora de la siguiente manera. Componed CF con CFF y decidme el resultado. N. Aplicad ahora el operador que nos quedaba, F, con el resultado que acabáis de obtener. ¿Qué os sale?

F, igual que cuando lo hemos hecho de la otra forma. Es verdad. Obtenemos en los dos casos F. Luego, podemos asociar como queramos. El resultado será siempre el mismo. Eso es. Y si tomáis todos los operadores y los componéis de tres en tres, veréis que siempre da el mismo operador, se asocien de una u otra forma. Bueno, podemos decir entonces que la composición de operadores tiene... ¿qué propiedad? La asociativa. ¿Me dejáis que intente resumir lo descubierto hasta ahora? Sabemos, la operación composición de operadores es ley interna. Todas las casillas de la tabla segunda quedaban rellenas con elementos de G, y además acababan... Acabamos de ver que la composición de operadores posee la propiedad asociativa.

En la unidad didáctica número uno, dice que cuando un conjunto con una operación cumple que esa operación es interna y asociativa, el par formado por el conjunto y la operación recibe el nombre de semigrupo. Música Entonces, ¿nuestro conjunto G con la composición de operadores es un semigrupo? Efectivamente. Pero continuemos y veamos si existen más propiedades. Mirad ahora la tabla segunda y buscad algún elemento de G que tenga un comportamiento especial que lo distinga de los demás. Música Todos los operadores que hay en G cambian algo, menos el N que no hace nada. Música

Al confeccionar la tabla me he dado cuenta de que al componer cualquier otro operador con n, siempre obtenía ese otro operador. Además, la fila y la columna en las que está n son iguales a la de arriba del todo y a la de la izquierda del todo respectivamente. En efecto. Por eso, como aplicar n equivale a no hacer nada, diremos que n es el elemento neutro. Por tanto, siempre que encontremos un

elemento que operado con todos los demás del conjunto los deja invariantes, estaremos en presencia del elemento neutro. Por tanto, tenemos hasta ahora un semigrupo con elemento neutro, lo que también se llama monoide. Diremos pues que g, con la composición de operadores, es un semigrupo con elemento neutro, o más brevemente, que es el elemento neutro. Y g es un monoide.

Ahora fijaos bien. Voy a aplicar el operador C. ¿Qué deberé hacer a continuación para obtener el bloque del que he partido? Aplicar otra vez C. Y como lo sabes, no nos ha dicho de qué bloque ha partido. No necesito saberlo. Ya habíamos visto que aplicando dos veces C volvíamos siempre al mismo bloque. Bien. Así que haciendo C y otra vez C volvemos al sitio de partida. Es decir, C y después C es igual que N. Ahora os pregunto. ¿Qué operador deberemos utilizar para volver al principio si hemos hecho actuar a CF? Con CF. Cambiamos el color y la forma. Para volver al bloque de partida, deberemos usar un operador que ya hemos hecho.

lleve C para volver a tener el color inicial. Sí, pero eso no basta. Deberá llevar también FF, porque ya sabíamos que FFF equivalía a dejar la forma invariante. Entonces, después de CF, tenemos que aplicar CFF para quedarnos como estábamos. O sea, que también aplicar CF y después CFF es lo mismo que aplicar N. ¿Y cómo se llaman los operadores tales que al componerlos entre sí dan el neutro N? Cuando al componer dos elementos de G obtenemos el elemento neutro que es N, decimos que esos operadores son simétricos el uno del otro. ¿Y todos los elementos de G tienen simétrico? Hasta ahora solo hemos visto que los elementos de G son simétricos. ¿Y todos los elementos de G tienen simétrico? Hemos visto que C es simétrico de C y que CF es simétrico de N.

de CFF. Pero no sabemos si F y FF son simétricos. Eso es fácil de averiguar. Componemos F con FF y si el resultado es N, podremos afirmar que F y FF son por tanto simétricos. Tienes razón. Vamos a hacerlo. No te hace falta. Mira en la tabla la casilla que corresponde a la fila de F y a la columna de FF. Ese es el resultado. Ya lo hemos hecho antes. En esa casilla aparece N. Luego F y FF son simétricos. También observo mirando la tabla que todos los elementos de G tienen simétrico, pues en todas las filas aparece una vez el elemento neutro. Es cierto. Podemos mirar la tabla y comprobar que el simétrico de F es FF. Que el simétrico de C es C.

y por último, que el simétrico de CF es CFF. Llegamos pues a la conclusión de que todos los elementos de G poseen simétrico. Hasta ahora sabemos del par formado por el conjunto G y la composición de operadores lo siguiente. Es ley interna. Es asociativa. Existe elemento neutro y todo elemento tiene simétrico. Cuando un conjunto con una operación posee estas cuatro propiedades, decimos que tiene estructura de grupo. Entonces, el conjunto G con la operación composición de operadores es un grupo. Cierto, pero vamos a ver todavía una cosa más. ¿Qué es el conjunto G?

Mirad si la tabla es simétrica respecto de la diagonal principal. Es decir, si doblando la tabla por la diagonal, las letras de las casillas que se superponen coinciden o no. Ya veis que sí. ¿Por qué ocurre eso? Si os habéis fijado, habréis visto al principio que CF era lo mismo que FC. Es decir, que F y C conmutan. Y como todos nuestros operadores llevan C y F, conmutan unos con otros. Es decir, se pueden operar en el orden que se quiera y el resultado será siempre el mismo. Las casillas que están por encima de la diagonal corresponden a la composición de operadores en un orden determinado. En las casillas que

están por debajo aparecen esas mismas composiciones, pero con un orden determinado. En orden cambio.

Como en nuestro caso todos los operadores conmutan, veréis que los resultados de las casillas son los mismos. Entonces podemos decir que la composición de los elementos de G tiene la propiedad conmutativa. Con todo lo visto, podemos añadir al grupo que ya teníamos una propiedad más, la propiedad conmutativa. Se sobreentiende entonces que la conmutativa no es una propiedad necesaria para que un conjunto dotado de una ley de composición forme grupo. Efectivamente. Con las propiedades ley interna, asociativa, existencia de elemento neutro y existencia de simétrico para cada elemento,

Es suficiente para que un conjunto con una ley de composición forme un grupo. Si además posee, como en este caso, la propiedad conmutativa, diremos que se trata de un grupo conmutativo o abeliano. Así pues, el conjunto G con la composición de operadores es un grupo conmutativo o abeliano. Música

La Catedral de la Catedral de la Catedral Catedral de la Catedral de la Catedral

Gracias. Gracias.

Gracias. Gracias.

Gracias. Gracias.

Gracias. Gracias.

Gracias. Gracias.

Gracias. Gracias.

Gracias.