EGB 8 3

Curso de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza, PRONEP-EGB. Asignatura, Matemáticas. Título, Un espacio vectorial de dimensión 1, segunda parte.

Autores, Francisco Vecino, María Esperanza Garijo, María del Carmen Chamorro y la colaboración del profesor Alberto Edpun. Día de grabación, 16 de abril del 80. Día de emisión, 10 de mayo del 80.

Como ya les anunciamos, el equipo de matemáticas continuará hoy la historia que comenzó el sábado pasado. Les será útil tener delante el esquema que se le ha enviado, papel y lápiz y lo necesario para la grabación. Vamos a resumir todo lo visto hasta ahora.

Partimos del conjunto P formado por las tres clases de pastillas D, E e I descubiertas por el doctor X. Con la operación tomar una pastilla después de otra, designada por Más, se estudiaron en el laboratorio los resultados con cobayas y quedaron registrados en la tabla 1. Observando la tabla 1, llegamos a la conclusión de que el par P-Más era un grupo abeliano, primera estructura necesaria para construir un espacio vectorial. Continuando con el experimento, el doctor X instaló en las jaulas unos pequeños timbres, de manera que las cobayas ingerían tantas pastillas del mismo comedero como timbrazos sonaban. De esta forma quedó definida una ley externa de la siguiente manera.

Se tomó Z3 con la suma y producto como cuerpo de escalares. El número de timbrazos, 1, 2, 3 o más, pertenecía a la clase residual correspondiente de Z3. La ley externa designada por POR se definió del producto cartesiano Z3 por P en P de la siguiente forma.

Clase N por pastilla H significaba tomar N veces la pastilla H. Se comprobó a continuación que la ley externa POR cumplía los cuatro axiomas, con lo que quedó construido un espacio vectorial designado por la terna Z3P+. Vamos a ver ahora cómo se traducen los conceptos teóricos de sistema de generadores, independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial a nuestro vectorial concreto. Los vectores de nuestro espacio son sólo tres.

Las pastillas D, E e I. Cada pastilla es pues un vector. De entre ellos, el vector cero ha de ser forzosamente el elemento neutro del grupo P+. La pastilla I es pues el vector cero del espacio vectorial.

Los escalares son los elementos de Z3, clase 1, clase 2 y clase 3 que representan el número de timbrazos que suenan en las jaulas. Múltiplos de un vector serán expresiones de la forma un escalar por un vector. Los múltiplos P, por ejemplo, del vector E serán clase 1 por E, tomar una pastilla E igual a pastilla E, clase 2 por E, tomar dos pastillas E igual a E más E igual a D. D es, por tanto, un múltiplo del vector E. Y, por último, clase 3 por E igual a E más E más E igual a D más E igual a I vector cero, resultado que siempre se obtiene en cualquier espacio vectorial.

El vector cero, en nuestro caso la pastilla I, es siempre múltiplo de cualquier vector. Basta

tomar la combinación lineal cero por V. Aquí el escalar cero es la clase 3, igual a la clase cero, elemento neutro para la suma en Z3. Por eso sucede que clase 3 por E igual a I. También sucede, como en todo espacio vectorial, que el escalar cero, en nuestro caso la clase 3, por cualquier vector del espacio vectorial, es el vector cero, en este caso la pastilla I. Compruebe, pues, que clase 3 por E es igual a I. La teoría expuesta en la unidad didáctica número 3 nos dice que para saber si un conjunto o sistema de vectores es linealmente independiente o no, basta mirar si alguno de los vectores que lo forman es combinación lineal de los restantes.

En nuestro caso concreto, como el vectorial P se reduce a tres vectores y uno de ellos es el vector cero, sólo cabe mirar si el sistema de vectores formado por las pastillas D y E es ligado o no, ya que cualquier sistema de vectores que contenga al vector cero es siempre ligado. Para saber si el sistema formado por D y E es ligado o no, miraremos si D es un múltiplo de E, o lo que es lo mismo, si E es un múltiplo de D. Si D es múltiplo de E, existirá algún escalar de Z3 que multiplicado externamente, es decir, según la ley externa por E, nos dé D. En efecto, si hacemos clase 2 por E, esto es igual a E más E igual a D. Luego D es múltiplo del vector E, ya que puede expresarse como clase 2 por E. Igualmente se tiene clase 2 por D igual a D más D igual a E, y por tanto E es múltiplo del vector D, ya que E puede expresarse de la forma clase 2 por D. Consecuentemente con lo anterior, podemos concluir que el sistema de vectores formado por las pastillas D y E es linealmente dependiente, o dicho de otra forma, es un sistema ligado. Decimos que un conjunto de vectores es un sistema generador cuando todos los vectores del espacio pueden ser obtenidos mediante combinaciones lineales de los vectores de ese sistema.

¿El sistema de vectores formado por D y E será generador? En este caso la respuesta es evidente. Todos los vectores pueden obtenerse a partir de D y E. Así, para obtener D basta tomar la siguiente combinación lineal. Clase 1 por D más clase 3 por E es igual a D más E más E más E igual a D más I igual a D. El vector E se obtendrá como sigue, clase 3 por D más clase 1 por E igual a D más D más D más E igual a I más E igual a E. Por último, I se obtiene clase 1 por D más clase 1 por E igual a D más E igual a I. El sistema D-E es generador, pero al no ser linealmente independiente no es base, lo que nos permite asegurar que la dimensión de P no puede ser 2, ya que no existe ningún sistema formado por dos vectores que sea a la vez sistema generador y linealmente independiente.

No probamos con los sistemas D-I o E-I porque ambos contienen al vector cero, y cualquier sistema que lo contenga ya sabemos que es ligado. Vamos a ver ahora si el sistema formado por el vector E es generador. Que es linealmente independiente es claro, ya que se trata de un solo vector.

En consecuencia, si probamos que es generador, podremos decir que el vector E es una base del vectorial P. E genera el resto de los vectores de la siguiente forma. Clase 2 por E igual a E más E igual a D. Clase 3 por E igual a E más E más E igual a D más E igual a I. También el sistema formado por el vector D es una base. Es linealmente independiente y generador, ya que clase 2 por D igual a D más D igual a E. Clase 3 por D igual a D más D más D igual a E más D igual a I. Hemos encontrado todas las bases del vectorial P, la formada por el vector E y la

formada por el vector D. Como ambas tienen un solo vector, podemos concluir que dimensión de P es igual al número de vectores de la base igual a 1. Para finalizar, vamos a hallar las coordenadas de los vectores de P respecto de las dos bases encontradas.

Llamaremos base 1 a la formada por E y base 2 a la formada por D. En la base 1, las coordenadas de los vectores de P son inmediatas si observamos que vector E igual a clase 1 por E. Vector D igual a clase 2 por E. Y vector I igual a clase 3 por E. De aquí podemos deducir que las coordenadas son de E la clase 1, de D la clase 2, de I la clase 3 o lo que es lo mismo la clase 0. Ya que por definición, las coordenadas de un vector son los escalares que deben tomarse en la combinación lineal de los vectores de la base para obtener el vector dado. Respecto de la base 2, se tendría vector D igual a clase 1 por D. Vector E igual a clase 2 por D. Vector I igual a clase 0 por D. Y por tanto, las coordenadas serían de D la clase 1, de E la clase 2, de I la clase 0 o lo que es lo mismo la clase 3. Obsérvese que como el vectorial es de dimensión 1, el número de coordenadas de cada vector ha de ser también 1, ya que la dimensión del espacio nos dice el número de vectores de las bases. En consecuencia, las coordenadas de un vector, escalares necesarios para obtener la combinación lineal de los vectores de la base que da ese vector, son tantas como vectores hay en la base.

Reflexione sobre lo que ha escuchado y trate de construir ejemplos semejantes que le ayuden en su tarea escolar. Un saludo de todo el equipo de matemáticas.