EGB 8 7

Asignatura Matemáticas del PRONEP EGB, título un espacio vectorial de dimensión 1. Autores María del Carmen Chamorro, María Esperanza Garijo y Francisco Vecino. Interviene Gerardo Montero. Fecha de emisión 14 de marzo de 1981.

El equipo de matemáticas va a presentarles un programa dedicado al tema de los espacios vectoriales. En la página 38 de la guía de trabajo encontrará el esquema de esta emisión. Le aconsejamos que lo tenga preparado así como papel y lápiz.

En dicho esquema aparece la letra D para designar a la pastilla de adelgazar. Para evitar confusiones de audición con la letra E, hemos tomado la letra A en lugar de la D. Téngalo en cuenta. La estructura de espacio vectorial, aunque aparentemente no figura en los cuestionarios de EGB, es imprescindible a la hora de estudiar con perfecto sentido la regla de 3 simple y compuesta y los problemas de interés.

A nuestro juicio se trata de una estructura asequible a los alumnos de séptimo y octavo de EGB que previamente hayan trabajado con la estructura de grupo. Basta con encontrar modelos didácticos asequibles a su edad. Como siempre, hemos pretendido que se alcance un doble objetivo, reforzar el concepto de espacio vectorial expuesto en la unidad didáctica número 3 a través de un modelo didáctico aplicable a la segunda etapa de EGB.

La historia que contaremos es un tanto curiosa, pero nos permitirá construir un espacio vectorial muy sencillo. Usted podrá inventar otras muchas historias con el mismo fin. El doctor X ha descubierto tres tipos de pastillas.

La pastilla E, que sirve para engordar, la pastilla A, que hace adelgazar y la pastilla Y, de vitaminas, que no cambia el peso de los pacientes. Al probarlas en el laboratorio con cobayas, se ha observado un resultado curioso. Dos pastillas E, de engordar, hacen el mismo efecto que la pastilla A, de adelgazar.

Dos pastillas A, de adelgazar, hacen el mismo efecto que la pastilla E, de engordar. La pastilla Y, de vitaminas, tomada con la A o la E, hace el mismo efecto que la A y la E, respectivamente. Una pastilla A, tomada con una pastilla E, hacen el mismo efecto que una pastilla Y. En su diario de laboratorio, el doctor X ha anotado los resultados para que no se le olviden, y ha escrito lo siguiente.

A más A igual a E. E más E igual a A. Y más E igual a E. Y más A igual a A. Y por último, A más E igual a I. Para resumir los resultados, ha hecho una tabla de doble entrada siguiendo este orden. E, A, Y. A esta tabla la llamaremos tabla 1. La tabla 1 se encuentra en el esquema que se les ha enviado. Si observa atentamente la tabla, podrá comprobar que el conjunto de pastillas E, A, Y, al que llamaremos P, con la operación tomar una pastilla detrás de otra que hemos designado por más, es un grupo abeliano.

La ley es interna y asociativa. La pastilla I hace de elemento neutro. Las pastillas A y E son simétricas la una de la otra.

Y la operación más es conmutativa. Por tanto, el par P más es un grupo abeliano. Continuando con el experimento, el doctor X ha instalado en las jaulas de las cobayas unos pequeños timbres.

Y se han dispuesto tres comederos con pastillas I, A y E respectivamente. Cuando suena el timbre una sola vez, la cobaya toma una sola pastilla. Si suena el timbre dos veces, toma dos pastillas del mismo comedero.

Y por último, si suena el timbre tres veces, toma tres pastillas, pero siempre del mismo comedero. Es decir, la cobaya toma tantas pastillas de un mismo comedero como timbrazos suenan en la jaula. Supongamos que ha sonado tres veces el timbre y la cobaya ha escogido el comedero E. ¿Engordará, adelgazará o conservará su peso? La cobaya ha tomado tres pastillas E. El resultado será que se queda como estaba.

Dos pastillas E la hacen adelgazar. Si toma a continuación otra pastilla E, se quedará como estaba. El doctor X ha escrito así en su cuaderno.

Ahora ha sonado dos veces el timbre y la cobaya ha ido al comedero A. Toma dos pastillas A y, por tanto, adelgaza. Escribiremos, pues, clase 2 por A igual a A más A igual a E. Como podrá ver, se ha definido una ley externa designada por por del producto cartesiano Z3 por P en P. El cuerpo de escalares es Z3, conjunto de las clases residuales módulo 3 con la suma y el producto. Observará que hemos utilizado el número 3 perteneciente a la clase 0 para indicar el número de timbrazos.

Por tanto, habrá de entenderse que clase 3 más clase A es lo mismo que clase 0 más clase A igual a clase A. De la misma forma, si tomamos un número superior a 3, debemos entender que pertenece a la clase residual que le corresponde. La ley externa del producto cartesiano Z3 por P en P ha sido definida como sigue. Clase N por pastilla H es igual que tomar N veces la pastilla H. Comprobaremos a continuación que la ley externa por cumple los cuatro axiomas, con lo que habremos construido un espacio vectorial.

Veremos, pues, que P es un Z3 espacio vectorial, o dicho de otra forma, P es un espacio vectorial sobre el cuerpo Z3. En una de las jaulas ha sonado el timbre tres veces y mientras la cobaya se dirige al comedero A suena el timbre de nuevo dos veces. Ingiere cinco pastillas A que hacen el mismo efecto que dos pastillas A. Anotamos.

Clase 3 más clase 2, todo ello por A es igual a clase 5 por A igual a clase 2 por A igual a A más A igual a E. En la jaula de al lado ha sonado tres veces el timbre y la cobaya ha ido al comedero A. Más tarde ha sonado dos veces el timbre y de nuevo ha ido hacia las pastillas A. Escribiremos, pues, clase 3 por A más clase 2 por A igual a A más A más A todo ello más A más A igual a A más A igual a E. Como en las dos jaulas se ha producido el mismo resultado, el doctor X ha escrito

clase 3 más clase 2 todo ello por A igual a clase 3 por A más clase 2 por A. Después de realizar abundantes experimentos de este tipo, el doctor X ha llegado a la conclusión de que para sus pastillas siempre se cumple el siguiente asoma. Clase A más clase B todo ello por pastilla H es igual a clase A por pastilla H más clase B por pastilla H. Una de las cobayas ha mostrado un comportamiento anormal. Ha sonado el timbre dos veces y al dirigirse a los comederos ha tirado las pastillas mezclándolas.

Además ha tomado una pastilla A y otra E y a continuación otra vez ha tomado una pastilla A y otra E. Su comportamiento ha quedado anotado así. Clase 2 por A más E igual a clase 2 por I igual a I. Han vuelto a tocar dos veces el timbre y esta vez la cobaya ha tomado dos pastillas A. Para comprobar de nuevo si la cobaya ha vuelto a la normalidad se ha tocado el timbre otras dos veces y ahora ha tomado dos pastillas E. Este comportamiento se ha anotado como sigue. Clase 2 por A más clase 2 por E igual a A más A más E más E igual a I. Si observamos ha ocurrido que clase 2 por A más E es lo mismo que clase 2 por A más clase 2 por E. En ambos casos el resultado ha sido el mismo.

Repetida la experiencia se ha comprobado que siempre es cierto lo siguiente. Clase A por pastilla H más pastilla K es lo mismo que clase A por pastilla H más clase A por pastilla K. Como verá se ha comprobado hasta ahora que los dos primeros axiomas se verifican. Aquí hemos actuado sólo sobre unos cuantos ejemplos.

En su clase deberá agotar todos los casos posibles antes de asegurar que se cumple un determinado axioma. Si observa que tanto en Z3 como en P las operaciones son conmutativas se reduce considerablemente el número de casos. Es fácil comprobar que siempre ocurre que clase 1 por pastilla H es igual a pastilla H. El otro axioma que dice clase A todo ello por clase B por pastilla H igual a clase A por B por pastilla H lo dejamos para que sea usted quien se ejercite en su comprobación.

Vamos a resumir todo lo visto hasta ahora. Partimos del conjunto P formado por las tres clases de pastillas A, E e I descubiertas por el Dr. X. Con la operación tomar una pastilla después de otra designada por Mario, se estudiaron en el laboratorio los resultados con cobayas y quedaron registrados en la tabla 1. Observando la tabla 1 llegamos a la conclusión de que el par P más era un grupo abeliano, primera estructura necesaria para construir un espacio vectorial. Continuando con el experimento el Dr. X instaló en las jaulas unos pequeños timbres de manera que las cobayas ingerían tantas pastillas del mismo comedero como timbrazos sonaban.

De esta forma quedó definida una ley externa de la siguiente manera. Se tomó Z3 con la suma y producto como cuerpo de escalares. El número de timbrazos 1, 2, 3 o más pertenecía a la clase residual correspondiente de Z3.

La ley externa designada por POR se definió del producto cartesiano Z3 por P en P de la siguiente forma. Clase N por pastilla H significaba tomar N veces la pastilla H. Se comprobó a continuación que la ley externa POR cumplía los cuatro asiomas con lo que quedó construido

un espacio vectorial designado por la terna Z3 P más. Vamos a ver ahora cómo se traducen los conceptos teóricos de sistema de generadores, independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial a nuestro vectorial concreto.

Los vectores de nuestro espacio son sólo tres. Las pastillas A, E e I. Cada pastilla es pues un vector. De entre ellos el vector cero ha de ser forzosamente el elemento neutro del grupo P más.

La pastilla I es pues el vector cero del espacio vectorial. Los escalares son los elementos de Z3. Clase I, clase II y clase III que representan el número de timbrazos que suenan en las jaulas.

Múltiplos de un vector serán expresiones de la forma un escalar por un vector. Los múltiplos, por ejemplo, del vector E serán Clase I, por E, tomar una pastilla E igual a pastilla E. Clase II, por E, tomar dos pastillas E igual a E más E igual a A. A es por tanto un múltiplo del vector E. Y por último, clase III, por E, igual a E más E más E igual a A más E igual a I, vector cero. Resultado que siempre se obtiene en cualquier espacio vectorial.

El vector cero, en nuestro caso la pastilla I, es siempre múltiplo de cualquier vector. Basta tomar la combinación lineal cero por V. Aquí el escalar cero es la clase III igual a la clase cero, elemento neutro para la suma en Z3. Por eso sucede que clase III, por E, es igual a I. También sucede, como en todo espacio vectorial, que el escalar cero, en nuestro caso la clase III, por cualquier vector del espacio, es el vector cero, en este caso la pastilla I. Compruebe pues que clase III, por E, es igual a I y que clase III, por A, es igual a I. La teoría expuesta en la unidad didáctica número 3, nos dice que para saber si un conjunto o sistema de vectores es linealmente independiente o no, basta mirar si alguno de los vectores que lo forman es combinación lineal de los restantes.

En nuestro caso concreto, como el vectorial P se reduce a tres vectores, y uno de ellos es el vector cero, sólo cabe mirar si el sistema de vectores formado por las pastillas A y E es ligado o no, ya que cualquier sistema de vectores que contenga al vector cero es siempre ligado. Para saber si el sistema formado por A y E es ligado o no, miraremos si A es un múltiplo de E, o lo que es lo mismo, si E es un múltiplo de A. Si A es múltiplo de E, existirá algún escalar de Z3 que multiplicado externamente, es decir, según la ley externa por E, nos dé A. En efecto, si hacemos clase 2 por E, esto es igual a E más E igual a, luego A es múltiplo del vector E, ya que puede expresarse como clase 2 por E. Igualmente se tiene clase 2 por A igual a A más A igual a E. Y por tanto, E es múltiplo del vector A, ya que E puede expresarse de la forma clase 2 por A. Consecuentemente con lo anterior, podemos concluir que el sistema de vectores formado por las pastillas A y E es linealmente dependiente, o dicho de otra forma, es un sistema ligado. Decimos que un conjunto de vectores es un sistema generador cuando todos los vectores del espacio pueden ser obtenidos mediante combinaciones lineales de los vectores de ese sistema.

¿El sistema de vectores formado por A y E será generador? En este caso la respuesta es evidente. Todos los vectores pueden obtenerse a partir de A y E. Así, para obtener A, basta tomar la siguiente combinación lineal. Clase 1 por A más clase 3 por E es igual a A más E más E

más E igual a A más I igual a A. El vector E se obtendrá como sigue.

Clase 3 por A más clase 1 por E igual a A más A más A más E igual a I más E igual a E. Por último, I se obtiene. Clase 1 por A más clase 1 por E igual a A más E igual a I. El sistema formado por los vectores A y E es generador, pero al no ser linealmente independiente no es base, lo que nos permite asegurar que la dimensión de P no puede ser 2, ya que no existe ningún sistema formado por dos vectores que sea a la vez sistema generador y linealmente independiente. No probamos con los sistemas A, I o E, I porque ambos contienen al vector cero y cualquier sistema que lo contenga ya sabemos que es ligado.

Vamos a ver ahora si el sistema formado por el vector E es generador. Que es linealmente independiente es claro, ya que se trata de un solo vector. En consecuencia, si probamos que es generador, podremos decir que el vector E es una base del vectorial P. E genera el resto de los vectores de la siguiente forma.

Clase 2 por E igual a E más E igual a A. Clase 3 por E igual a E más E más E igual a A más E igual a I. También el sistema formado por el vector A es una base, es linealmente independiente y generador, ya que clase 2 por A es igual a A más A igual a E. Y clase 3 por A es igual a A más A más A igual a E más A igual a I. Hemos encontrado todas las bases del vectorial P, la formada por el vector E y la formada por el vector A. Como ambas tienen un solo vector, podremos concluir que dimensión de P es igual al número de vectores de la base igual a 1. Para finalizar, vamos a hallar las coordenadas de los vectores de P respecto de las dos bases encontradas. Llamaremos base 1 a la formada por E y base 2 a la formada por A. En la base 1, las coordenadas de los vectores de P son inmediatas si observamos que vector E igual a clase 1 por E, vector A igual a clase 2 por E y vector I igual a clase 3 por E. De aquí podemos deducir que las coordenadas son del vector E la clase 1, del vector A la clase 2 y del vector I la clase 3 o lo que es lo mismo la clase 0. Ya que por definición, las coordenadas de un vector son los escalares que deben tomarse en la combinación lineal de los vectores de la base para obtener el vector dado. Respecto de la base 2 se tendría vector A igual a clase 1 por A, vector E igual a clase 2 por A y vector I igual a clase 0 por A. Por tanto, las coordenadas serían del vector A la clase 1, del vector E la clase 2 y del vector I la clase 3 o lo que es lo mismo la clase 0. Obsérvese que como el vectorial es de dimensión 1, el número de coordenadas de cada vector ha de ser también 1 ya que la dimensión del espacio nos dice el número de vectores de las bases.

En consecuencia, las coordenadas de un vector, escalares necesarios para obtener la combinación lineal de los vectores de la base que da ese vector, son tantas como vectores hay en la base. Reflexione sobre lo que ha escuchado y trate de construir ejemplos semejantes que le ayuden en su tarea escolar. Un saludo de todo el equipo de matemáticas.