

AC 10 97

Hola, buenas noches, bienvenidos al Tiempo del Curso de Acceso. Esta noche, en nuestro programa Matemáticas Básicas, nos acompaña el profesor Eduardo Ramos, con el que veremos las lecciones 8 y 9, la lógica de proposiciones y combinatorio. Esta noche, en nuestro programa de Matemáticas Básicas, vamos a ver las lecciones 8 y 9, la lógica de proposiciones y combinatoria.

Para hablar de todo ello nos acompaña el profesor Eduardo Ramos. Muy buenas noches. Buenas noches.

¿Por qué esta lección sobre lógica de proposiciones? Bien, si recordamos cuando comenzamos a hablar de esta asignatura de Matemáticas Básicas en el día de presentación, y como pone la guía de la carrera, uno de los objetivos de este curso es adquirir la disciplina y el rigor precisos para el trabajo intelectual. Pues bien, este bloque de lecciones que estamos estudiando durante este periodo, el bloque referido a conjuntos, aplicaciones y funciones, y este número 9 sobre la lógica, son precisamente un conjunto de temas teóricos que hacen referencia a lo que podríamos llamar fundamentos del pensamiento matemático. De forma que, con su estudio, intentamos que nuestros estudiantes profundicen, adquieran ese rigor que hablamos de necesario para el trabajo intelectual de un universitario.

¿De qué trata la lógica? De una manera muy sucinta, podríamos decir que la lógica trata de explicar cómo funciona el pensamiento del hombre. Decimos que, suele decirse que el hombre es un animal racional. ¿Cómo razona? Explicar esto, este proceso de razonamiento del pensamiento humano, es precisamente uno de los objetivos de la lógica.

El problema ha preocupado al hombre desde el inicio de los tiempos. Los filósofos griegos, los escolásticos, los filósofos contemporáneos, todos han tratado de una u otra manera este problema. En el problema de cómo funciona el pensamiento humano intervienen muchos aspectos, incluso aspectos ideológicos, pero otros de carácter técnico, como pueden ser los aspectos lingüísticos.

No es este el objetivo de esta lección desde nuestro punto de vista. Nosotros lo que vamos a hacer es tratar de ocuparnos de los aspectos más simples que admiten un tratamiento matemático. Las ideas que se exponen aquí, o que se estudian desde el punto de vista matemático en la lógica, se deben a un matemático inglés que se llama George Boole, que vivió desde 1815 a 1864.

De él dijo el pensador Bertrand Russell que las matemáticas puras fueron descubiertas por Boole en un trabajo llamado Las leyes del pensamiento, publicado en 1854. Esto puede ser una exageración, sin duda, pero nos puede servir para darnos una idea de la importancia que tiene la lógica matemática y sus ramificaciones actualmente. En resumen, el objetivo de esta lección va a ser estudiar unas cuantas reglas simples mediante las cuales los matemáticos generan

conocimientos más o menos complicados a partir de unas cuantas oraciones cuyo valor de verdad, cierto o falso, se asume por hipótesis.

Este capítulo 8 me parece que, además, aunque se vaya a ver desde una perspectiva matemática, pero tiene mucho que ver con la filosofía, con la lengua. Está como unido o entrelazado también, ¿no? Efectivamente, pero ya digo que nosotros estos aspectos no podemos tocarlos en un curso en el que se habla de matemáticas. Pero invitamos, por supuesto, a todos los alumnos a que acudan, a lo mejor, a un manual de filosofía, acudan a leer el problema o a contemplar el problema desde otra óptica, desde la óptica de un lingüista, desde la óptica de un filósofo que enriquecerá su visión del problema.

Pues bien, ¿a qué se llama proposición o enunciado? Bien, en el lenguaje corriente, en el lenguaje que hablamos normalmente, podemos distinguir varios tipos de oraciones. Un tipo de oraciones son siempre ciertas, o al menos como tales se tienen. Por ejemplo, el todo es mayor que las partes.

Eso cualquier persona con una cabeza más o menos lógica, diríamos, lo admitiría de buen grado. Otras, en cambio, se tienen siempre por falsas, por la misma razón, por la razón de que así es nuestra manera de pensar. Por ejemplo, oraciones como $2 + 2$ es igual a 5, se tiene por falsa en cualquier, digamos, ser racional.

Al que no admitiese esto, seguramente tendríamos la tentación de tildarle de loco. Hay un tercer tipo de oraciones que pueden ser unas veces ciertas u otras veces falsas, dependiendo del contexto, del momento en que se enuncian, etcétera. Por ejemplo, una oración como hoy llueve puede ser verdad o puede ser mentira, dependiendo del instante temporal en que hagamos ésta, éste enunciado, ésta oración.

Sin embargo, también hay un cuarto tipo de oraciones, que las dejaremos aparte de nuestro estudio, en que no es posible decir nada acerca de su valor de verdad, es decir, acerca de si son verdad o si son mentira. Son oraciones, por ejemplo, que expresan un deseo. Ojalá que llueva café.

Esta oración no podemos decir que sea cierta o que sea falsa. Entonces, nosotros nos vamos a concentrar, desde el punto de vista matemático, en aquellas oraciones de las que siempre se puede asegurar que son verdaderas o falsas. A este tipo de oraciones les llamamos proposiciones o enunciados.

¿Y cómo se pueden combinar proposiciones para obtener otras que sean más complejas? Bien, en el lenguaje, digamos, famoso, típico de las películas del oeste, los indios dicen mi querer tal cosa. Son oraciones extremadamente simples, del tipo sujeto, verbo y predicado. Pero bien, es cierto que en el lenguaje ordinario, incluso el pensamiento, el razonamiento ordinario, suele emplear un tipo de enunciados o de proposiciones que engloban a otras que se pueden considerar más elementales, más simples.

Este tipo de enunciados o proposiciones, que son el resultado de unir algunas o más de una o varias proposiciones simples, se llaman proposiciones compuestas. Para ello, se utilizan unas partículas, que comentaremos ahora más adelante, que denominaremos conectores. Ya hemos dicho que aquí se va a estudiar la lógica de proposiciones de una manera matemática, pero ¿cuáles son los problemas propiamente matemáticos? Eso es, no hablaremos de los aspectos ideológicos, de los aspectos lingüísticos de esto.

Lo que nos interesa como objeto matemático sobre las proposiciones, sobre los enunciados, qué se puede hacer con ellas, son esencialmente dos cosas. En primer lugar, ¿de qué manera se pueden componer enunciados? Es decir, ¿cómo formar oraciones o enunciados compuestos a base de enunciados simples? Y en segundo lugar, ¿cómo se puede determinar el valor de verdad de un enunciado compuesto a partir del valor de verdad de los enunciados simples que lo forman? ¿Qué se entiende por valor de verdad? Es el poder decidir si el enunciado compuesto es cierto o es mentira. Eso se llama valor de verdad del enunciado compuesto.

Pues este es el segundo problema que abordaremos en este tema. Hay proposiciones que enuncian varias cualidades de un ser o una cosa, pero los enunciados simples pueden relacionarse entre sí modificando el sentido del enunciado. ¿Podemos poner algún ejemplo de proposición compuesta? Así damos paso a esto que decía de los dos problemas.

El primero, atacamos el primer problema, por decirlo así, es cómo componer proposiciones. Un ejemplo muy ilustrativo puede ser el siguiente. Una oración como esta, el acusado es inocente del primer cargo y culpable del segundo cargo.

Es una oración que se puede expresar de esta manera. Llamemos simbólicamente, por ejemplo, p a la afirmación al enunciado, el acusado es inocente del primer cargo y llamemos q al enunciado, el acusado es culpable del segundo cargo. Entonces lo que estamos enunciando simbólicamente es la proposición compuesta p y q , pasan las dos cosas simultáneamente.

Este es el problema de componer enunciados simples, como mediante una serie de partículas, una serie de elementos del lenguaje podemos, a partir de oraciones simples, de frases simples del tipo sujeto, verbo y predicado que decíamos antes, oraciones más compuestas, más complicadas, digamos que tienen un carácter más difícil de analizar. Si observo que se utilizan partículas para unir oraciones simples, por ejemplo en este caso la partícula i , pero ¿cuáles son? Bueno, en los idiomas hay diversos tipos de lo que llamamos conectores, que en definitiva es eso que acabas de decir, es una partícula que se pone en el medio, antes o después de una oración simple, para dar lugar a un nexo que la una con otra oración simple y formen un todo, una oración compuesta. Le digo que hay diversas maneras de hacerlo, hay el i , hay el siempre que, hay el pero, hay el y no, hay el ni que, es decir, depende del idioma concreto de que se esté hablando, por eso aquí puedo hacer una breve referencia a lo que comentábamos antes, por eso en este tipo de temas hay aspectos lingüísticos también que considerar sobre qué significa cada una de las partículas.

Bueno, entonces, en concreto un conector es una partícula que se interpone, que se mezcla,

que se une a enunciados simples para dar lugar a enunciados compuestos y los conectores más útiles o más sencillos o más comunes o más populares o los que, digamos, los primeros que se nos ocurren son los siguientes, la negación, la conjunción y la disyunción. ¿Qué es la negación? Pues la negación de una proposición p es una proposición que niega lo que dice la proposición p , el ejemplo característico y típico en este tipo de ejercicios, la lógica es divertida, la proposición p es la lógica es divertida, entonces la negación de esa proposición es la lógica no es divertida, p y no p . Las tablas de verdad, bueno, una tabla de verdad de una proposición es expresar bajo qué condiciones una proposición es cierta o es falsa, una proposición p puede ser o bien verdad, en cuyo caso en una tabla pondríamos una v , o bien falsa, en cuyo caso en la tabla pondríamos una f . Bueno, pues la tabla de verdad de una proposición, que es la negación de otra, que también se llama la proposición contraria de la otra, cambia las f por las v , es decir, cuando p es verdadera su contraria es falsa y cuando p es falsa su contraria es verdadera. Entonces, sabiendo el valor de verdad de p , sabemos el valor de verdad de su negación no p . ¿Esto son lo que se llama valores de verdad? El valor de verdad es el carácter de ser cierto o falso una proposición y la tabla de verdad es recoger en una tabla todas las posibilidades lógicas que puede presentar una proposición.

Lo que acabo de decir es que la proposición contraria de una proposición dada está ligada, su tabla de verdad está ligada a la proposición p mediante una regla bastante simple, que es cambiar las f por las v , es decir, les repito, cuando una proposición p es cierta su contraria es falsa irreplicablemente. Bueno, iba a decirte que hay, como había anunciado, otro tipo de conectores elementales, por decirlo así. Otro conector elemental es la conjunción de dos proposiciones.

La conjunción de dos proposiciones es la proposición que resulta de unir las con una partícula como la i . Por ejemplo, una proposición p es la lógica es divertida, una proposición q es las matemáticas son difíciles, la proposición conjunción de p y q es la lógica es divertida y las matemáticas son difíciles. De nuevo tenemos también un procedimiento sencillo para determinar la tabla de verdad, el conjunto de posibles valores de verdad de la proposición conjunción p y q , cuando conocemos los valores de verdad de las proposiciones p y q por separado. Una proposición que engloba a dos proposiciones simples como son p y q , una proposición con la conjunción, su tabla tiene lógicamente cuatro filas, para los cuatro posibilidades que hay de verdadero y falso de dos proposiciones.

Bueno, pues la proposición p y q es verdadera cuando p y q por separado son verdaderas y es falsa en cualquiera de los demás casos. Y finalmente, el otro conector también elemental es el llamado disyunción de proposiciones. La disyunción de proposiciones es aquella proposición que se obtiene mediante la utilización de una partícula del tipo O en el medio de dos proposiciones simples.

Por ejemplo, escucho música o leo un libro. Si la proposición p es escucho música y la proposición q es leo un libro, la proposición conjunción p o q es escucho música o leo un libro. Aquí hay que hacer una pequeña salvedad.

En el lenguaje ordinario se suele a veces pensar en la disyunción como algo que si se da una cosa no se puede dar la otra, y recíprocamente, si se da la segunda no se puede dar la primera. Eso le daremos un nombre un poco más específico más adelante. De momento, la proposición disyunción $p \vee q$ incluye aquellos casos en que se pueden dar las dos simultáneamente.

El ejemplo que acabo de poner es bien ilustrativo. Escucho música o leo un libro es algo que puede ser cierto ambas por separado. Bueno, la tabla de verdad de la proposición $p \vee q$ tiene también cuatro filas y resulta, como parece lógico, que sea cierta la proposición $p \vee q$ en todos los casos, salvo que cada una de las proposiciones por separado elementales p y q sean falsas.

Es decir, cuando al menos una de las dos proposiciones elementales es cierta, la proposición disyunción es también cierta, y cuando las dos son falsas, la proposición disyunción es falsa. Hemos hablado de conectores simples, pero con el lenguaje se utilizan conectores también a veces más complejos. Sí, efectivamente, como anunciaba antes, la negación, la conjunción, la disyunción son aquellas partículas más elementales, aquellas con composición de proposiciones simples más fáciles, más intuitivas, las primeras que se nos ocurren.

Pero en el lenguaje ordinario empleamos otro tipo de relaciones un poco más elaboradas, si quieres, de entre dos proposiciones elementales. Algunas que merece la pena ver en este curso y que se estudian en el texto son las que llamamos enunciado condicional, disyunción excluyente y bicondicional. El enunciado condicional recoge esa situación bastante común que en el lenguaje del estilo como si llueve, entonces no salgo de paseo.

Son las proposiciones del tipo si p , entonces q , cuando ocurre la condición p , entonces ocurre la condición q . La tabla de verdad de esta proposición condicional $p \rightarrow q$, que también se dice con esa terminología, dice que es cierta la condicional en todos los casos salvo que p sea verdadera y q falsa. Digamos que la lógica aquí aplica el beneficio de la duda a la proposición condicional. Solo en una situación que repugna al sentido común, que es que de algo cierto se siga algo falso, decimos que la proposición condicional es falsa.

En todos los demás casos decimos que es cierta. Aunque quizás este es algo que merezca la pena reflexionar sobre ello y que incluye aspectos psicológicos que en algunos textos estudian, de que no todo el mundo da por bueno este hecho. Porque de esta afirmación o de esta teoría, por así decirlo, se pueden llegar a conclusiones un poco chocantes que desde el punto de vista lógico son válidas.

Cuál es, por ejemplo, el enunciado si 2 por 2 es igual a 5, entonces los elefantes vuelan. Como p es falso, 2 por 2 igual a 5, y q es falso, los elefantes vuelan. Sin embargo, el enunciado condicional $p \rightarrow q$, entonces q se admite como cierto.

Ya digo que esto, algunos autores pueden cuestionar incluso esta posibilidad. Pero desde el punto de vista lógico, la lógica de Bull, esto es correcto. La disyunción excluyente es aquella proposición que hace un rato hemos comentado.

Recoge aquella situación en que se unen, se hace disyunción de dos proposiciones elementales que no pueden ser una verdadera y otra falsa, perdón, simultáneamente ciertas o simultáneamente falsas. Es decir, su valor de verdad es cierto cuando una es cierta y la otra no, o cuando la primera es falsa y la otra verdadera. Pero cuando las dos son verdaderas al mismo tiempo, o cuando las dos son falsas al mismo tiempo, la disyunción excluyente se entiende como falsa.

Por ejemplo, o toco el piano o veo la televisión. Esto recoge esa situación en que no parece que sea posible tocar el piano y ver la televisión simultáneamente si se admite eso como un hecho físicamente incompatible. Y el otro el otro conector que un poco más complicado que comentábamos en esta parte es el bicondicional.

El bicondicional entre dos proposiciones, que se simboliza con unas flechitas y se suele leer P, Si, Solo, Si, Q, recoge aquella situación en que es una proposición que es cierta cuando las dos proposiciones elementales que lo forman son ciertas o las dos proposiciones elementales que lo forman son falsas. Y es falsa en los otros dos casos, cuando una es cierta y otra es falsa, o cuando una es falsa y otra es cierta. Por ejemplo, esto es una cosa que se utiliza bastante en matemáticas.

Dos fracciones, por ejemplo, recordar un tema algo de número de fraccionarios. Dos fracciones A partido por B y C partido por D son equivalentes, proposición 1, proposición P, Si, Solo, Si, el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda A por D es igual al denominador de la primera por el numerador de la segunda, B por C. Otra proposición, si A por D es igual a B por C, es equivalente, Si, Solo, Si, A partido por B es equivalente a C partido por D. ¿De acuerdo? Entonces, esta sería un nuevo tipo de conector que incluiría una posible relación un poco más diferente que las elementales que comentábamos antes entre dos proposiciones simples P y Q. Pues vamos a finalizar esta lección 8. Hay algo que se aborda en el texto y que, pues, sería conveniente saber qué es. ¿Qué es un razonamiento lógicamente válido? Sí, quizás sea el culmen de esta lección.

¿Qué es razonar? ¿Qué es razonar desde el punto de vista lógico con validez? ¿Y cómo se sabe si algo que está razonado es válido? Efectivamente, esto, el hacerlo bien, el razonamiento, el hacerlo lógicamente coherente, es lo que distingue a un intelectual, a alguien que sabe lo que está diciendo y que sabe razonar, de las charlas de café y de las discusiones banales. Entonces, razonar, en esencia, consiste en afirmar que cierta proposición denominada conclusión se sigue de otras proposiciones denominadas premisas. Un razonamiento es válido desde el punto de vista lógico si siempre que las premisas sean ciertas lo es la conclusión.

En caso contrario, se dice que es una falacia a la que muchas veces caemos o nos están acostumbrando mucha gente cuando habla. Hay que llamar incluso la atención sobre un hecho que puede parecer también paradójico, que es que el razonamiento puede ser lógicamente válido independiente, a lo mejor, del valor de verdad de la conclusión. Dicho de otra manera, de unas premisas incorrectas puede deducirse válidamente una conclusión incorrecta.

Eso no afecta para nada a la coherencia del razonamiento. Y sin embargo, que es lo que hay que ejercitar a veces en las discusiones, para encontrar el error en un razonamiento hay que encontrar un caso en que las premisas sean verdaderas y la conclusión es falsa. Un estudiante que haya seguido estas lecciones, y ahí hay varias reglas de inferencia que no se preguntan en el programa, pero que debieran los estudiantes leer, pero un estudiante que estudie estas lecciones debiera concluir sabiendo razonar de manera válida en su vida académica, en su vida intelectual.

Pues vamos a entrar en el capítulo 9, que habla de combinatoria. ¿Qué problemas se abordan en esta lección, la combinatoria? En esencia es el llamado problema de contar. Puede parecer una tontería, efectivamente, cuando el conjunto de números, perdón, la colección de objetos que si quieren contar es pequeña, parece que contar es bastante fácil, pero la cosa se complica cuando el conjunto a contar, enumerar, ya es grande.

Estoy seguro que todo el mundo sabe, es capaz de contar hasta 10, como hacen los niños, pero también estoy seguro de que a más de uno le ha de costar un rato averiguar, por ejemplo, cuántos boletos hay que rellenar para tener la seguridad de acertar en la lotería primitiva. Entonces, eso es el problema que se aborda en esta lección. ¿Pero qué es contar desde un punto de vista matemático? La definición que podríamos dar, o el concepto matemático, es que contar es hallar el cardinal de un conjunto, es decir, es saber cuántos elementos lo forman.

Ya he dicho, el problema es fácil cuando el conjunto es pequeño, cuando el conjunto es pequeño ese problema es sencillo. Cuando el conjunto es complejo, no tiene una estructura simple, evidente, entonces cuando no aparece una manera sistemática de organizar los elementos, entonces el problema puede ser ya realmente difícil. Sin embargo, hay muchas situaciones que son las que se explotan desde este punto de vista de la combinatoria, en el que es posible descubrir en la estructura del conjunto una cierta regla de formación que puede simplificar o atajar de manera muy rápida el calcular cuántos elementos tiene ese conjunto.

Eso es precisamente el objeto de la combinatoria, la búsqueda de métodos inteligentes para contar. Bueno, pues ya sabemos que hay métodos para contar, pero ¿cuál sería el primero? Bueno, primero hay muchos métodos, pero el más sencillo, uno de los que se nos ocurre enseguida y aplicando ya lo que conocemos de funciones y aplicaciones, es intentar buscar una aplicación biyectiva, es decir, una aplicación uno a uno entre los elementos del conjunto que queremos contar y los elementos del conjunto 1, 2, etcétera, n . Entonces, si somos capaces de descubrir la existencia de esa aplicación biyectiva, ya sabemos que el conjunto dado tiene tantos elementos como este, que es fácil averiguar cuántos tiene, tiene exactamente n . Entonces, el truco, la idea, la búsqueda que hay que hacer es encontrar y llegar a averiguar una aplicación biyectiva entre el conjunto que los elementos que queremos contar y este conjunto que acabo de citar. Hay más métodos, ¿no? Sí, esto puede que no sea fácil por miles de razones, porque no es sencillo verla, porque no es fácil descubrir el procedimiento y entonces hay que recurrir o puede recurrirse a lo que denominamos un proceso de construcción, que se puede enunciar con la llamada regla de multiplicación, es decir, que dice si un conjunto A

tienen elementos y el conjunto B tiene m elementos, el número de elecciones distintas de un elemento de A y un elemento de B es el producto n por m . Para cada posibilidad que tenemos de escoger un elemento de A, tenemos m posibilidades de escoger un elemento de B y entonces en total tenemos n por m posibilidades.

Con este procedimiento, que es algo así como poner objetos en casillas, como se explican en varios ejemplos del libro, se puede recurrir a muchas situaciones que aparente en primera vista podrían no tener nada que ver con ellos. En definitiva, este método es muy general y muy válido para el problema de encontrar cuántas posibilidades, cuántos números de colecciones, etcétera, tenemos para elegir en un problema dado. Pero de este método general hay algunos que se presentan con más frecuencias, como las permutaciones, las variaciones... Sí, esos son los nombrecillos técnicos.

Bien, del proceso de construcción que hemos explicado someramente en general, hay algunas situaciones que se repiten, que se presentan con mayor frecuencia. Es el problema de ordenar una colección de objetos, es el problema de calcular o encontrar el número de subconjuntos ordenados de R elementos que se pueden formar con un conjunto que tiene n elementos y simplemente el número de subconjuntos de R elementos que se pueden formar con un conjunto de n elementos. Cualquiera de ellos, el primero de las ordenaciones, da lugar al clásico, a la palabra clásica, son las permutaciones de n elementos.

El segundo caso, lo de los subconjuntos ordenados, da lugar a la palabra clásica, de las variaciones de n elementos tomados de R en R . Y el tercer caso, el caso del número de subconjuntos, da lugar a las combinaciones. Esa es la terminología técnica, que es una expresión que, en definitiva, recoge situaciones que se presentan con bastante frecuencia. Pero todos ellos, e incluso la manera de calcular las permutaciones, que es factorial de n , como se estudia en el libro, la manera de calcular las variaciones o las combinaciones, no son más que aplicar al caso, al problema concreto, el método general que estábamos comentando anteriormente.

Esto conviene detenerse un poquito, porque además es útil para el cálculo de probabilidades el saber, una vez más, como empezamos a hablar de esta lección, contar de manera inteligente. Pues no tenemos tiempo para más. Despedimos con matemáticas básicas el tiempo del curso de acceso, recordando que, en el próximo programa, veremos los capítulos 10 y 11, el cálculo de probabilidades y estadística.

Muy buenas noches y muchas gracias. Pues buenas noches y, de nuevo, un saludo muy cordial a todos nuestros alumnos. Con el curso de acceso, despedimos por esta semana la programación radiofónica de la UNED.

El próximo lunes volveremos. Nuestro primer espacio será Aula de Filología. Continuaremos con Revista de Geografía e Historia.

Nuestro siguiente espacio será la Facultad de Ciencias y, para acabar, el curso de acceso. Les

agradecemos su atención. Que pasen un feliz fin de semana.