

AC 15 9

Matemáticas especiales, emisión número 13, el cuerpo de los números racionales. En esta emisión radiofónica vamos a seguir hablando sobre los números. En los programas anteriores vimos el número natural y el número entero.

Estudiábamos la necesidad de ampliar el concepto más intuitivo de número, el número natural, con el de número entero, ya que había algunas operaciones que no se podían realizar en el conjunto de los números naturales. Sí, recuerdo que la resta de números naturales no siempre se puede realizar. ¿Y recuerda usted por qué motivo? Creo que era porque algunas veces, al restar dos números naturales, no obtenemos otro número natural.

De acuerdo. Dicho más correctamente, este hecho significa que la resta en el conjunto de los números naturales no es una ley de composición interna. Y habíamos dicho que toda operación en estos conjuntos de números que definíamos debía de ser una ley de composición interna.

El concepto de número entero lo introducíamos como ampliación del concepto de número natural. Es decir, el proceso que seguíamos y que seguiremos en esta emisión es el ampliar poco a poco el campo de los números. Es importante recalcar que la necesidad de la definición de nuevos números viene por el hecho de definir nuevas operaciones.

¿Recuerdan cómo introducíamos los números enteros? Lo hacíamos a partir de pares ordenados de números naturales. Bien, el proceso que vamos a seguir para introducir los números racionales a partir de los números enteros es básicamente el mismo. Lo haremos a partir de pares ordenados de números enteros.

Una vez formado el conjunto de pares ordenados de números naturales, ¿qué hacíamos a continuación? En ese conjunto definíamos una relación de equivalencia y obteníamos el conjunto cociente. Precisamente cada clase de equivalencia del conjunto cociente definía un número entero. Bueno, este es exactamente el camino que emplearemos para definir el conjunto de los números racionales.

Una vez construido el conjunto de pares ordenados de números enteros, definimos en él una relación de equivalencia y obtendremos el conjunto cociente. Cada clase de equivalencia en este conjunto cociente será un número racional. ¿Cuál es la necesidad de ampliar el conjunto de números enteros? Como pasaba en el conjunto de los números naturales con la resta, en el conjunto de números enteros existe una operación que no siempre se puede realizar con la certeza de obtener otro número entero.

Esta es la operación de dividir. ¿Cuál sería el resultado de dividir los números enteros 3 entre 6? Pues 0,5. Pero ya veo que no es un número entero.

O sea que la operación de dividir no siempre es posible en el conjunto de los números enteros. Tendría entonces que construir un conjunto en el cual esta operación sea siempre posible.

Bueno, pues vamos a construir este conjunto.

Para construir este conjunto, consideremos el conjunto de pares ordenados de números enteros. Por ejemplo, el elemento 5 menos 2 pertenece a este conjunto. Podemos representar los pares ordenados de números enteros en una forma que es conocida por todos ustedes, en forma de fracción o quebrado.

De manera que al primer elemento del par le llamamos numerador y al segundo elemento del par le llamamos denominador. Y lo escribimos uno encima del otro separados por una raya horizontal. Entonces podemos considerar que las fracciones o quebrados son elementos del producto cartesiano del conjunto de los números enteros por sí mismo.

Sí, así es. Pero tenemos que hacer una salvedad. Es que el denominador nunca puede ser el cero.

Así, el numerador puede ser cualquier número entero y el denominador cualquier número entero distinto de cero. Pues las fracciones 2 partido por cero menos 7 partido por cero, etcétera, no tienen ningún sentido. Una vez que tenemos el conjunto de las fracciones o el conjunto de pares ordenados de números enteros con la salvedad anteriormente dicha, vamos a ver que hay fracciones que representan el mismo cociente.

Así, por ejemplo, las fracciones un medio, dos cuartos, tres sextos. ¿Qué característica común tienen? Yo creo que si efectuamos la división entre el numerador y el denominador se obtiene siempre el mismo resultado. En este caso se obtiene 0,5.

Bien, podemos decir que estas fracciones son equivalentes. En realidad lo que hemos hecho ha sido definir una relación de equivalencia en el conjunto producto cartesiano de los números enteros por sí mismo. Esto es lo mismo que hacíamos con los números enteros.

Pero, ¿cómo se definiría esta relación de equivalencia? Matemáticamente, esta relación de equivalencia estaría definida así. Dos fracciones están relacionadas o son equivalentes si al multiplicar el numerador de la primera por el denominador de la segunda se obtiene el mismo resultado que si multiplicamos el denominador de la primera por el numerador de la segunda. Teniendo siempre presente que el denominador de una fracción nunca puede ser cero.

Como en otras ocasiones, esta relación de equivalencia producirá una clasificación y un conjunto cociente. Me imagino que el conjunto cociente será el conjunto de los números racionales. ¿No es así? Bueno, antes vamos a ver cuáles serían las clases de equivalencia.

Hemos dicho que todas las fracciones que representan el mismo cociente están relacionadas entre sí. Por lo tanto, pertenecerán a la misma clase de equivalencia. ¿Pueden decirme qué fracciones están relacionadas con la fracción un cuarto? Habrá infinitas fracciones.

Algunas de estas pueden ser dos octavos, tres doceavos, cuatro dieciséisavos, etc. Bien, todas estas fracciones pertenecen a una clase de equivalencia. A esta clase de equivalencia la

llamamos número racional.

Un cuarto o cero coma veinticinco, ya que al dividir uno entre cuatro se obtiene cero coma veinticinco. Y el conjunto cociente obtenido por esta relación de equivalencia es el conjunto de los números racionales. ¿Y en este conjunto podremos realizar la operación de dividir siempre? Por supuesto.

Lo que hemos hecho ha sido ampliar el conjunto de los números enteros formando otro conjunto en el que se pueda realizar esta operación. Pienso que este conjunto también tendrá un número infinito de elementos, ¿no es así? Sí, sí. Pues al igual que con los números naturales y enteros se pueden formar infinitas clases de equivalencia.

En esta emisión radiofónica hemos tratado de aclarar únicamente el concepto y la necesidad del número racional. Pues pensamos que la operatoria no es adecuada para un programa de radio y que además nuestros alumnos en este tema no tendrán muchas dificultades. Antes de acabar por hoy queremos ver un poco por encima la estructura algebraica que posee el conjunto de los números racionales.

Empecemos con la operación suma. ¿Qué propiedades posee? Al igual que los números enteros posee las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento simétrico. En primer lugar tenemos que observar que la suma de números racionales es una ley de composición interna en dicho conjunto.

Pues al sumar dos fracciones o números racionales se obtiene otro número racional. Las propiedades conmutativa y asociativa son fáciles de demostrar. El elemento neutro será la fracción cero partido por cualquier número entero que en realidad es el número cero.

Si tenemos una fracción cualquiera, a partido por b , ¿cuál será su simétrica, señorita? Habrá que buscar una fracción que sumada con la anterior resulte cero. Por lo tanto será la misma fracción pero cambiada de signo. Es decir, la fracción menos a partido por b . Con estas propiedades, ¿qué estructura tiene el conjunto de los números racionales con la operación suma? La misma que los números enteros.

Es un grupo conmutativo. Muy bien. Consideremos ahora el producto de fracciones.

¿Es una ley de composición interna? Sí, porque cuando multiplicamos dos fracciones obtenemos otra fracción. Bien. Es fácil de entender que también verifica las propiedades conmutativa y asociativa.

Pero, ¿cuál será el elemento neutro? El número que al multiplicarlo por cualquier fracción resulte esta misma. Supongo que será el 1. Bien. El 1, que puesto en forma de fracción es 1 partido por 1. Y el elemento simétrico de una fracción cualquiera, a partido por b , ¿saben cuál será? Tendremos que buscar una fracción que al multiplicarla por la a partido por b resulte el elemento neutro.

Es decir, el 1. Pero no se me ocurre cuál puede ser. Bueno, el elemento simétrico del a partido por b es el b partido por a . Pues si multiplicamos ambos se obtiene el 1. ¿Cuál será el simétrico de la fracción 0 partido por a , siendo a un número entero distinto de 0 ? Debería ser el a partido por 0 . Pero dijimos que esto no era un número racional, pues no tenía sentido dividir por 0 . Exacto. Entonces, este elemento es el único que no tiene simétrico.

Por lo tanto, la estructura algebraica del conjunto de los números racionales, con la multiplicación, es de semigrupo conmutativo y con elemento neutro. Si tenemos en cuenta que todos los elementos tienen simétrico, excepto el 0 partido por a , o sea, el elemento neutro de la suma, y que además la suma es distributiva respecto al producto, podemos afirmar que el conjunto de los números racionales, con la suma y el producto, tiene estructura de cuerpo conmutativo. Por ejemplo, el elemento 5 menos 2 pertenecen a este conjunto.