

... Matemáticas básicas. Título, estructuras algebraicas. Guión número 14. Autor, José Antonio Fernández Abater. Fecha de emisión, 9 del 1 del 80. ... Vamos a tratar de introducir en este tema el concepto de estructura. Es decir, ¿qué significa establecer en un conjunto una estructura? Como habrán podido comprobar en las emisiones anteriores, existe una continua relación entre los temas de matemáticas

Por eso, como en casi todos los guiones, lo primero que vamos a hacer es repasar brevemente los conceptos vistos en el programa anterior. ¿Recuerdan ustedes lo que era una ley de composición interna definida en un conjunto A ? Recuerdo que hacíamos corresponder a cada par de elementos del conjunto A otro elemento del mismo conjunto de una forma arbitraria. En efecto. Ahora me acuerdo también de la importancia que dábamos al hecho de que la forma de hacer corresponder a cada par de elementos de A otro elemento de A fuera completamente arbitraria. De acuerdo. Esta es una primera idea de lo que significa definir una ley de composición interna en un conjunto. Efectivamente, esta forma de hacer corresponder a cada par de elementos del conjunto otro elemento del mismo conjunto no tenía ninguna restricción. ¿Es verdad? Es decir, la podemos definir como queramos.

Enunciábamos también de una forma más correcta este concepto mediante el producto cartesiano. ¿Recuerdan ustedes cómo era? Creo que sí. Una ley de composición interna en un conjunto A la definimos como una aplicación del producto cartesiano de A por A en el mismo conjunto A . Muy bien. Fíjense ustedes que hablamos de aplicación y no de correspondencia. Es decir, que todos y cada uno de los elementos del conjunto A por A deben tener una imagen única en el conjunto A . Como es evidente por esta definición, y así lo dijimos en la emisión anterior, en un conjunto A podemos definir más de una ley de composición interna. Cada aplicación de A por A en A , correctamente definida, será una ley de composición interna.

interna. Para terminar con la ley de composición interna, digamos que se le suele llamar también operaciones. Así, si por ejemplo en el conjunto A tenemos definida cierta ley que hace corresponder al par de elementos x , y del conjunto A por A , el elemento z , también del conjunto A , diremos que x operado con y nos da como resultado z . Mediante esta forma podemos más adelante explicar mejor las propiedades que cumplen estas leyes u operaciones. Veíamos también en la emisión anterior una primera idea sobre lo que quiere decir que un conjunto A es un conjunto de elementos

conjunto esté dotado de una estructura. ¿Recuerdan ustedes algo sobre esto? Sí. Un conjunto estaba dotado de una estructura cuando entre los elementos del mismo habíamos establecido cierta organización. Por ejemplo, cuando en un conjunto definíamos una relación de orden, estábamos organizando los elementos del conjunto de una forma particular. ¿No es así? Sí, sí. Exacto. Este es precisamente el tema central del programa de hoy. El razonamiento que seguimos es el siguiente. Primero, veremos que las leyes de composición interna pueden cumplir ciertas propiedades. Después, cada vez que tengamos un conjunto en el cual hayamos definido una ley de composición interna, examinamos la ley de composición interna. Y examinaremos las propiedades que cumple ésta. Según las propiedades que cumpla, el conjunto tendrá una estructura.

algebraica determinada. O sea, que diremos que un conjunto tiene una estructura algebraica determinada cuando hemos definido en él una ley de composición interna que cumple ciertas propiedades. Efectivamente. Siempre resulta complicado el explicar por radio las propiedades que cumple cierta operación, por lo que recomendamos que sigan ustedes en su libro de texto lo que vamos a decir a continuación. Una ley de composición interna definida en un conjunto A se dice que es conmutativa cuando dados dos elementos cualesquiera de dicho conjunto A , la imagen, por la aplicación que define la ley del par X y Y , es la misma interna. Que la del par YX .

Repetir. Presten atención. Una ley de composición interna definida en un conjunto A se dice que es conmutativa cuando dados dos elementos cualesquiera de dicho conjunto A , la imagen, por la aplicación que define la ley del par XI , es la misma que la del par IX . Por favor, ¿puede poner un ejemplo para aclarar esta idea? Por supuesto. Como vimos también en la emisión anterior, la suma de números naturales era una ley de composición interna. Esta es una ley conmutativa, ya que el elemento asociado, por ejemplo, al par $2,3$, es el mismo que el asociado al par $3,2$. En ambos casos, este elemento es el número natural 5 . ¿Se me ocurrió? Se me ocurre pensar que el producto de números naturales es el producto de números naturales.

Muy bien, muy bien, su ejemplo es correcto. Podríamos haber dicho lo mismo con otras palabras. Es decir, una ley es conmutativa cuando el resultado de operar X con Y es el mismo que el que se obtiene al

operar Y con X . Veamos ahora la propiedad asociativa. Decimos que una ley de composición interna definida en el conjunto A es asociativa cuando el resultado de operar X con Y es el mismo que el que se obtiene al operar Y con Y . Y es el mismo que el resultado de operar X con Y .

Cuando, dados tres elementos cualesquiera, x , y , z del conjunto A , se cumple que el resultado de operar x con y , operado a su vez con z , es el mismo que el que se obtiene al operar x con el resultado de la operación de y con z . Se me ocurre entonces que la suma de números naturales es asociativa. Así, considerando tres números naturales cualesquiera, por ejemplo, 2, 3 y 6, hacemos lo siguiente. Sumamos primero 2 con 3 y obtenemos el número natural 5. A este número le sumamos el 6, obteniendo finalmente el 11. Este mismo resultado lo conseguimos también haciendo la misma operación. Hacemos la suma de 2 con el resultado de 3 más 6.

ya que 2 más 9 es 11. Perfectamente. Veo que han comprendido el significado de la propiedad asociativa. Pueden comprobar ustedes, como ejercicio, que el producto de números naturales es también asociativo. El elemento neutro

Nos da como resultado este mismo elemento X . Este elemento neutro, si existe, tiene la propiedad de ser único. ¿Se puede aclarar un poco este concepto? Por supuesto, cómo no. Si al elemento neutro le llamamos, por ejemplo, E , para cualquier elemento X del conjunto A se cumple que X operado con E es igual a E operado con X . Y ambas operaciones nos dan como resultado X . El definir el elemento neutro tanto por la derecha como por la izquierda. Es debido a que la operación no tiene por qué ser conmutativa. ¿Podría poner un ejemplo? Bien, volvamos a la suma de números naturales. Consideremos el cero como número natural.

elemento sumado con cero nos da ese mismo elemento. Es decir, podemos definir al cero como elemento neutro de la operación suma. ¿Cuál sería el elemento neutro de la operación producto? Pues yo creo que este elemento neutro sería el número natural uno, ya que el producto de cualquier número con el uno nos da otra vez el mismo número. Exactamente. Podemos considerar al uno como elemento neutro del producto de números naturales. Bien, introduzcamos ahora la idea de elemento simétrico. Como siempre, consideremos que tenemos definida en A una ley de composición interna. Además, supongamos que esta ley tiene elemento neutro. Dado un elemento x de A , diremos que el elemento neutro de A es el elemento que tiene el elemento

este elemento tiene simétrico cuando existe otro elemento de A que operado a la derecha y a la izquierda con X nos da el elemento neutro. Notemos que así como el elemento neutro era único, es decir, el mismo para todos los elementos del conjunto, el elemento simétrico generalmente varía para cada elemento y es muy importante darse cuenta que un elemento no puede nunca tener simétrico si en esa ley de composición interna no existe elemento neutro. Creo que como en las definiciones anteriores lo mejor sería poner un ejemplo. De acuerdo, el ejemplo de los números naturales no nos sirve ya que según la definición anterior el elemento simétrico del número 3 sería el número menos 3 ya que 3 más menos 3 es igual a 3.

tres es igual a cero, que es el elemento neutro. Pero resulta que el número menos tres no es un número natural, o sea, no pertenece al conjunto que estamos considerando. Sin embargo, este es un ejemplo completamente válido si el conjunto de partida en el cual definimos la ley de composición interna suma es el conjunto de los números enteros, en lugar del conjunto de los números naturales. Bueno, entonces hasta ahora las propiedades que hemos visto que puede cumplir una ley de composición interna son conmutativa, asociativa, que exista elemento neutro y que exista simétrico. Además, así como el elemento neutro es único para todos los elementos del conjunto, el simétrico dependía del elemento considerado. Muy bien, exactamente eso es. Una vez vistas estas propiedades que puede cumplir un conjunto de partida en el cual definimos la ley de composición interna, podemos ver que el conjunto de partida en el cual definimos la ley de composición interna es el conjunto de

interna, definimos cada una de las estructuras algebraicas según las propiedades que se cumplan. El conjunto tendrá una u otra estructura. Supongamos un conjunto A no vacío en el cual hayamos definido una ley de composición interna. Si esta ley es asociativa, diremos que A tiene la estructura de semigrupo. Si además existe el elemento neutro, diremos que es un semigrupo con elemento neutro. Por último, si además de las otras dos propiedades, verifica que todos y cada uno de los elementos de A tiene simétrico, diremos que A , con la ley de composición interna, es un grupo. Si en cualquier

de las estructuras anteriores la ley es conmutativa, diremos que el semigrupo o el grupo es abeliano o

conmutativo. Entonces, según entiendo, el grupo es una estructura que abarca a la de semigrupo. Es decir, que todo grupo es a su vez semigrupo y no lo contrario. En efecto, en su libro de texto estudiarán también el concepto de subgrupo que no hemos tratado en esta emisión. Tengan ustedes cuidado con distinguir bien subgrupo de semigrupo. Son ideas distintas y la experiencia nos ha mostrado que ustedes suelen confundir. Bueno, pues no nos queda más que, como siempre, recomendarles que repasen todas estas estructuras algebraicas en su libro de texto. Gracias.

Fin