

AC 15 28

Matemáticas especiales, guión número 7, correspondencias y aplicaciones entre conjuntos, fecha de emisión 19 de noviembre de 1980. En esta emisión vamos a tratar el tema de las correspondencias y aplicaciones. Deben hacer un esfuerzo para comprender el contenido de todo lo que digamos, porque ambos conceptos, el de correspondencia y sobre todo el de aplicación, son sumamente importantes.

En gran cantidad de definiciones matemáticas, las aplicaciones se emplean como herramientas y, desde luego, no existe sector de las matemáticas donde las aplicaciones no tengan un papel básico en la construcción de la teoría matemática. Entonces, ¿podemos sacar la conclusión de que es difícil entender las ideas de correspondencia y aplicación? Todo lo contrario. La extraordinaria capacidad que tienen las aplicaciones como instrumento matemático básico reside en gran medida en su sencillez y en su naturaleza intuitiva, pero no adelantemos acontecimientos.

Antes de entrar en el tema de hoy, vamos a repasar un concepto previo que nos será de gran utilidad. Es un viejo conocido de ustedes, de las emisiones anteriores. ¿Recuerdan ustedes a qué llamábamos producto cartesiano de dos conjuntos? Creo que sí.

Dados dos conjuntos, A y B, denominamos producto cartesiano de A por B al conjunto formado por pares ordenados de elementos, tales que la primera componente de cada par es un elemento del conjunto A y la segunda componente es un elemento de B. La definición es correcta. Reforzaremos su comprensión con un ejemplo. Sea A el conjunto formado por las letras M y P y B el conjunto cuyos elementos son los números 1, 2 y 3. ¿Cuál será el conjunto A por B? Supongo que debe ser el constituido por los pares ordenados m_1 , m_2 , m_3 , p_1 , p_2 y p_3 .

Exacto. Si ha quedado claro, prescindiremos sólo de momento de utilizar la idea de producto cartesiano. Pretendo avanzar ahora en la idea intuitiva de correspondencia.

Para ello, consideremos de nuevo los conjuntos A, cuyos elementos son M y P y B formado por 1, 2 y 3. Relacionaremos estos conjuntos mediante el siguiente enunciado. Al elemento M del conjunto A le hacemos corresponder el elemento 1 del conjunto B. Al elemento P de A le hacemos corresponder el elemento 1 de B. Y al elemento P de A también le hacemos corresponder el 2 elemento de B. Pues bien, acabamos de construir una correspondencia entre los conjuntos A y B. ¿Por qué razón a la letra M le hemos hecho corresponder el número 1 y no el 3, por ejemplo? No hay ninguna razón. La elección ha sido totalmente arbitraria.

Si a la letra M del conjunto A le hubiéramos asignado el número 3 de B, como usted dice, el enunciado de los elementos que se correspondían habría sido distinto. Es decir, hubiéramos construido otra correspondencia diferente. Veamos si lo comprendo.

Si yo confecciono una especie de lista donde vaya consignando a tal elemento de A le corresponde tal elemento de B, tendré determinada una correspondencia aunque haya hecho

la lista mi capricho. Ha captado perfectamente la idea de correspondencia. Al confeccionar esa lista, como usted lo llama, en realidad estamos dando un criterio estricto que nos permite saber si determinado elemento del primer conjunto, cualquiera que sea dicho elemento, está en correspondencia con determinado elemento del segundo conjunto, cualquiera que sea tal elemento.

Siempre que enunciemos un criterio de este tipo, habremos construido una correspondencia. Vamos a dar ahora el enunciado de este criterio de una forma un poco diferente. Tomemos nuestro ejemplo.

Decíamos, sea el conjunto A de las letras M y P y el conjunto B de los números 1, 2 y 3. A M le corresponde el 1. A P le corresponde el 1. A P le corresponde el 3. Si suprimimos las palabras le corresponde, el criterio que determina nuestra correspondencia quedaría reducido a enunciar los pares M1, P1 y P3. El primer elemento de cada par pertenece al conjunto A y el segundo al B. ¿No era esto lo que hacíamos al definir el producto cartesiano A por B? No exactamente, pero sí tiene que ver bastante con el producto cartesiano de los dos conjuntos. Los pares ordenados que ahora nos permiten definir una correspondencia entre A y B son precisamente elementos del producto A por B, pero no son todos los pares de dicho producto.

Por regla general, tendremos para cada correspondencia algunos pares de A por B. Entiendo que esto quiere decir que, si reunimos los pares ordenados que definen una correspondencia, obtendremos un subconjunto del producto cartesiano. Sí, esa es la idea fundamental. Ahora ya estamos en disposición de definir rigurosamente el concepto de correspondencia.

Dados los conjuntos A y B, decimos que establecemos una correspondencia entre A y B cuando consideramos un subconjunto del producto cartesiano A por B. Si un par pertenece a dicho subconjunto, decimos que al primer elemento del par le corresponde el segundo elemento del par en esta correspondencia. Entonces, dado un subconjunto de A por B, ¿se trata de interpretar los pares que lo forman enunciando que al primer elemento de cada par le corresponde el segundo elemento? Efectivamente, es así como leemos cada par. Siguiendo con esta cuestión, es muy usual leer los pares de una correspondencia de otra manera.

Al primer elemento de un par se le llama origen del segundo en la correspondencia, y al segundo elemento del par se le denomina imagen del primero en la correspondencia. Por ejemplo, si a la letra P le correspondía el número 1, diremos que P es origen de 1 en la correspondencia, y 1 es imagen de P. Bien, comprendidas estas denominaciones, pasemos al caso más interesante de correspondencia, la aplicación. Veamos previamente un ejemplo.

Entre el conjunto A de los alumnos mayores de 25 años y el conjunto B, que ahora es el de los números naturales, establecemos la correspondencia tener la edad D. Suponemos que la edad es medida en años enteros. Observamos que todo alumno de A es origen de un solo número natural de B, su edad. Entiendo que se trata de una correspondencia en la que todos los elementos del conjunto de partida están obligados a ser orígenes, y cada origen tiene una sola imagen.

Exacto. Acaba de expresar usted los dos rasgos esenciales de las aplicaciones. He aquí su definición completa.

Una aplicación del conjunto A en el conjunto B es una correspondencia entre A y B, tal que en ella todo elemento de A es origen, y a cada origen le corresponde una sola imagen. Se me plantea una duda. Intentaré explicarme.

En el ejemplo de aplicación propuesto por usted, tenemos una aplicación de los alumnos del curso de acceso en el conjunto de los números naturales. Pues bien, observo que el 18 no es imagen de ningún alumno, ya que todos ellos tienen 25 años o más. ¿Es compatible este caso con la definición? Yo preguntaría, ¿y por qué no? Fíjense que en la definición de aplicación decimos solamente que a cada elemento del primer conjunto le hacemos corresponder un único elemento del segundo.

Por tanto, a los elementos del conjunto de llegada no les imponemos ninguna condición. Es decir, caben todas las posibilidades, desde que un elemento de B no sea imagen en la aplicación, hasta que sea imagen de varios elementos de A. Precisamente, cuando imponemos condiciones a los elementos del segundo conjunto, obtenemos casos particulares de aplicaciones. ¿Podemos obliguemos a todos los elementos del conjunto de llegada a ser imágenes de por lo menos un elemento del conjunto de partida? Con esta condición obtenemos las aplicaciones subyectivas o sobre.

¿Quiere decirse que las aplicaciones subyectivas o sobre son aquellas aplicaciones en que el segundo conjunto está, por así decirlo, cubierto con las imágenes del primer conjunto? Sí. Es una idea un tanto gráfica pero acertada. Les propondré un ejemplo.

Sea otra vez el conjunto A de alumnos del curso de acceso y sea ahora B el conjunto de las asignaturas específicas. Derecho, humanidades, económicas y fisiconaturales. Consideramos la correspondencia en que a cada alumno de A le corresponde la asignatura específica en la que está matriculado.

¿Es esta una aplicación subyectiva? Sí lo es, ya que cualquiera de las cuatro asignaturas específicas es imagen de algún alumno porque habrá alumnos matriculados en cualquiera de las cuatro asignaturas. Para completar tu respuesta habría que ver, antes que nada, si esta correspondencia es aplicación. Pienso que lo será siempre que supongamos que cada alumno está matriculado en una sola asignatura específica.

Perfecto. En este supuesto se trata de una aplicación sobre. Cada uno de ustedes ha señalado un aspecto de su definición.

Esto es, una aplicación subyectiva del conjunto A sobre el B es una aplicación en que cada elemento de B es imagen de algún elemento de A. Pasemos a otro caso de aplicación. Para ello haremos una restricción sobre el conjunto B. Obligaremos a cada elemento imagen de B a tener un solo origen en A. ¿Es necesario que todo elemento de B sea imagen de uno de A? No.

Puede haber elementos de B sin correspondientes en A . Lo imprescindible es que, siendo una aplicación, a cada elemento imagen le corresponda un solo elemento origen.

Propongan ustedes ahora un ejemplo de aplicación inyectiva. Bien. Sea A el conjunto de los alumnos del curso de acceso y B el conjunto de los números naturales.

En una aplicación de A en B hacemos corresponder a cada alumno de A su número de matriculación en la UNED. ¿Por qué es una aplicación inyectiva? Por dos razones. A cada alumno de A le corresponde un solo número de matrícula, su imagen, y a cada número de matrícula de un alumno del curso de acceso le corresponde un solo alumno.

En efecto. Por la primera razón es una aplicación. Por la segunda tiene carácter inyectivo.

Resumiendo, una aplicación inyectiva del conjunto A en B es una aplicación de A en B en que a cada elemento imagen en B le corresponde un único o ningún elemento origen en A . ¿Puede haber aplicaciones que sean a la vez inyectivas y suprayectivas? Por supuesto. Son las aplicaciones biyectivas. Sin embargo, el tiempo se nos acaba y no podemos hablar con detalle de ellas.

Antes de terminar queremos recomendarles que después de cada emisión radiofónica de matemáticas especiales repasen en sus libros las ideas principales de cada emisión.