

... Matemáticas básicas, el número entero, emisión 18. En la emisión anterior... ...hemos introducido el concepto de número natural. Decíamos que el número natural es una clase de equivalencia... ...o el representante de una clase de equivalencia... ...construida considerando equivalentes... ...todos los conjuntos que tienen el mismo cardinal. En consecuencia, el conjunto de los números naturales... ...está formado por todas las clases... ...y el número de clases es el número natural.

de equivalencia. Es un conjunto cociente. Pretendemos en los minutos siguientes construir el conjunto de los números enteros a partir de los números naturales. Yo siempre he pensado que los números enteros se diferenciaban de los números naturales solamente en el signo más o menos que les precede. Podemos decir más exactamente que esa es una diferencia de poca significación matemática. Vamos a empezar poniendo de manifiesto la necesidad de la utilización de los números enteros. ¿Recuerdan qué es una ley de composición interna? Habíamos dicho que una ley de composición interna definida sobre un conjunto nos permite asociar a cada pareja de elementos otro elemento que también pertenece a este conjunto. Es en definitiva una aplicación del conjunto producto del conjunto. Vamos a repetir esta última definición.

Es, en definitiva, una aplicación del conjunto, producto del conjunto por sí mismo en el conjunto. Bueno, pensemos entonces en el conjunto de los números naturales. Como todos recordarán, sus elementos son los números 0, 1, 2, 3, 4, etc. Pues bien, señorita, ¿la suma es una ley de composición interna en este conjunto? Yo creo que sí, pues dados dos números cualesquiera, le podemos asignar otro número que también pertenece al conjunto de los números naturales. De esta manera, podemos decir que 2 más 3 es igual a 5, que 7 más 10 es igual a 17. Ajá, ya habíamos señalado que sobre un conjunto... Se puede definir más de una ley de composición interna. Sigamos en el conjunto de los números naturales.

naturales. Usted, por favor, ¿qué otra ley de composición interna se puede definir en él? Podemos considerar el producto de números naturales. Según esta ley, dados dos números naturales, podemos obtener otro número natural. Así podemos decir que 2 por 7 es igual a 14, que 3 por 21 es igual a 63. Muy bien, ¿y qué me pueden decir de la resta de números naturales? Yo creo que al restar dos números naturales se obtiene otro número natural. Por ejemplo, 7 menos 5 es igual a 2, 10 menos 4 es igual a 6, 4 menos 3 es igual a 1, etc. Por tanto, la resta de números naturales también será una ley de composición interna. ¿No es así, profesor? Ha puesto usted unos ejemplos concretos.

que pueden conducir a una conclusión errónea. Restar números naturales no siempre es posible. En este sentido, la resta o diferencia de números naturales no es una ley de composición interna. Es fácil de comprender que 7 menos 13 no es un número natural. 7 menos 13 es igual a menos 6. Menos 6 es un número negativo que no está incluido en el conjunto de los números naturales. Esto se puede solucionar diciendo que la resta de números naturales solamente se puede realizar cuando el primer número es mayor que el segundo. Esta condición que usted impone supone una restricción y, como consecuencia, no se puede decir que siempre es posible restar dos números naturales. Luego, no es una ley de composición interna, ya que carece precisamente de esa generalidad como en la ley de composición interna. Esto es lo que hemos puesto de manifiesto al tratar de la suma y el producto de números naturales.

Estoy de acuerdo. La resta o diferencia de números naturales no es una

auténtica ley de composición interna. Pero, ¿entonces existen una serie de operaciones que no se pueden realizar? Precisamente por ese motivo parece lógico ampliar el concepto de número natural. Veamos cómo podemos plantear matemáticamente esta ampliación. Es intuitivo pensar que si, por ejemplo, la operación 7 menos 13 no tiene sentido dentro del campo de los números naturales, la podemos dejar indicada. O mejor, representarla por una pareja ordenada de números naturales, esto es, por la pareja 7, 13. Entonces, todas las operaciones del tipo señalado las representamos por pares ordenados de elementos. Podemos decir, con toda generalidad, que la diferencia o resta de números naturales, la representamos por pares ordenados con arreglo al siguiente criterio. El primer elemento de esta pareja es el minuendo.

Y el sustraendo es el segundo elemento. Según esto podemos decir que 7 menos 2 es equivalente al par ordenado 7, 2. Que 4 menos 5 es equivalente al par ordenado 4, 5. Efectivamente. Por tanto, cualquier diferencia de números naturales la podemos representar por un par ordenado de números naturales. Tanto si su diferencia es un número positivo como si es un número negativo. Conviene insistir en que los pares ordenados de elementos son a su vez elementos del conjunto producto de dos conjuntos. De esta manera podemos descubrir matemáticamente estas parejas de elementos. O sea que las parejas o pares ordenados de elementos pueden considerarse como elementos del conjunto producto de los números naturales por sí mismo. Es más correcto decir que son elementos del conjunto producto de los números naturales. Ahora bien, no es suficiente.

Es suficiente decir esto. Basta pensar, por ejemplo, en las siguientes parejas. 5, 0. 6, 1. 7, 2. 15, 10. 21, 16. ¿Se han fijado? Sí. Es evidente que todas estas parejas son pares ordenados de elementos. Son, en consecuencia, elementos del conjunto de los números naturales por sí mismos, pero presentan una particularidad. ¿Saben ustedes cuál es? La única particularidad que yo observo en las parejas enunciadas es que la diferencia entre la primera y segunda componentes de estas parejas representan al mismo número entero. De esta manera, podemos decir que... 5 menos 0 es igual a 5. 15 menos 10 es igual a 5. 21 menos 16 es igual a 5. Precisamente es así.

Esta era la condición que queríamos resaltar. Por eso podemos decir que en este sentido las parejas anteriores son equivalentes. Es fácil imaginar que este caso presentado no es único. Hay infinitas parejas que representan la misma diferencia. Señorita, ¿cómo podemos reflejar matemáticamente esta circunstancia? Me imagino que será como en otras ocasiones. Definiendo una relación de equivalencia entre los elementos del conjunto producto de los números naturales por sí mismo. O de otra manera, definiendo una relación de equivalencia entre los pares ordenados de números naturales. Bueno, pues exactamente. Muy bien. Ahora bien, ¿cómo podemos enunciar esta relación de equivalencia? Bastaría, pienso yo, con enunciar un criterio que pusiera de manifiesto esta circunstancia. Puede ser, por ejemplo, decir que dos pares ordenados... ..de números naturales, o dos elementos del conjunto producto del conjunto de números naturales...

por sí mismo son equivalentes cuando representan al mismo número entero. Muy bien, vamos a repetir con un poco más de reposo. Podemos decir, por ejemplo, que dos pares ordenados de números naturales o dos elementos del conjunto producto del conjunto de números naturales por sí mismo son equivalentes cuando representan al mismo número entero. Bueno, pues de esta manera no queda adecuadamente definida la relación de equivalencia, puesto que el representar al

mismo número entero es una consecuencia. En el criterio que se utiliza para definir la relación de equivalencia debe ponerse de manifiesto la condición que han de verificar los pares ordenados para que representen al mismo número entero. Entonces se puede decir que dos pares ordenados de números naturales son equivalentes cuando la diferencia entre los pares ordenados es de un número entero. Bueno, pues de esta manera podemos decir que dos pares ordenados son equivalentes cuando la diferencia entre los pares ordenados es de un número entero. Entonces se puede decir que dos pares ordenados son equivalentes

primera componente y la segunda componente es la misma. Eso sí, cuando la diferencia entre la primera componente y la segunda componente es la misma. De acuerdo, decirlo de esa manera es suficiente para, sin posibilidad de equivocación, averiguar si dos pares ordenados de números naturales son equivalentes o no. Por tanto, la relación de equivalencia así definida engendra en el conjunto producto del conjunto de los números naturales por sí mismos una clasificación. De modo que en cada una de las clases de equivalencia están incluidas todas las parejas equivalentes entre sí. Todas las parejas cuya diferencia suponen el mismo número entero. Como toda relación de equivalencia engendra en el conjunto en el que se ha definido un conjunto cociente, yo no veo el significado de este conjunto de equivalencia. ¿Qué es este conjunto cociente en este caso? Es fácil de entender.

Fíjese, señorita. Sabemos que una relación de equivalencia produce en el conjunto en el que se ha definido una clasificación, consecuencia del agrupamiento de sus elementos en clases de equivalencia. El conjunto cociente tiene por elementos las correspondientes clases de equivalencia. En nuestro caso de ahora, recordarán que las clases de equivalencia son conjuntos de pares ordenados de números naturales equivalentes entre sí, o sea, parejas de elementos que representan al mismo número entero. Luego el conjunto cociente estará formado por todas las clases de equivalencia así obtenidas. Luego cada elemento del conjunto cociente representa a un número entero. Pues cada clase de equivalencia está formada por una serie de pares ordenados equivalentes entre sí. Así es. Por tanto, los elementos que representan a los pares ordenados son los que se han definido como equivalentes.

Los elementos del conjunto cociente son números enteros. Luego podemos decir que el conjunto cociente así obtenido es el conjunto de los números enteros. Yo he notado que cada clase de equivalencia está formada por infinitas parejas equivalentes entre sí. ¿Estoy equivocada? No, no. Además es muy conveniente resaltar esta circunstancia. Ya habíamos quedado en que el conjunto de los números naturales consta de infinitos elementos, ya que infinito es el número de los números naturales. 0, 1, 2, 3, etc. Hasta el infinito. Parece lógico entonces pensar que hay infinitas posibilidades de obtener pares ordenados de este conjunto. Ahondando en esta característica, podemos afirmar que no sólo cada clase de equivalencia tiene infinitos elementos, sino que existen infinitas clases de equivalencia. ¿De dónde se deduce?

que el conjunto de los números enteros consta de infinitos elementos. Habitualmente los números enteros los representamos de la misma manera que a los números naturales, precedidos del correspondiente signo más o menos. Esto supone representación diferente, en principio, a la que hemos estudiado aquí, ¿no? En esta emisión nos hemos preocupado fundamentalmente de la construcción del conjunto de los números enteros. Hemos tratado de exponer el porqué de la necesidad de utilizar números distintos a los números naturales. La

representación de los números enteros, en la práctica, no se hace con pares ordenados de elementos. Esa representación matemática a la que usted se refiere es consecuencia de un proceso matemático que por ahora no vamos a considerar todavía. Gracias.

¡Gracias!