

AC 15 52

Buenas noches, así comienza con nuestra sintonía como cada día de lunes a viernes el tiempo que el curso de acceso tiene asignado dentro de la programación radiofónica de la UNED. Queremos indicar que la asignatura de esta noche, matemáticas especiales, es eminentemente práctica y desde este punto de vista el alumno únicamente debe poseer los conocimientos teóricos necesarios para resolver con éxito ejercicios y problemas. Por supuesto, sería ideal que comprendiese todos los argumentos teóricos del texto base, pero hay que insistir que en la prueba final sólo hay problemas prácticos.

En esta línea y a título de ejemplo la parte teórica de combinatoria y probabilidad no es de gran importancia, así como la lección 1 de la unidad didáctica número 2, grupos, anillos y cuerpos, donde sólo interesan los conceptos fundamentales. El cuerpo de los números reales, lección 3 de la unidad didáctica 2, consideramos que es un tema que supera la madurez matemática de un alumno de este curso, así es que queda reducido a conseguir una idea de lo que es un número real. Como indicaciones generales hay que decir que para estudiar matemáticas debe utilizarse constantemente un cuaderno, donde se vayan tomando anotaciones de lo que se va leyendo y en general de todas las ideas que van surgiendo durante el estudio.

Una o muchas lecturas de los textos sin detenerse a expresar por escrito las ideas principales es en gran medida un trabajo perdido. Pues bien, esta noche en Matemáticas Especiales nos acompaña el profesor Antonio Costa y veremos con él la unidad didáctica número 4. Esta noche en Matemáticas Especiales nos acompaña el profesor Antonio Costa, buenas noches. Buenas noches Isabel.

Vamos a ver la unidad didáctica número 4. La unidad didáctica número 4 nos habla del plano afín, de polinomios y de fracciones racionales. ¿Qué es el plano afín? Sobre todo, ¿qué significa esto de afín? Bueno, pues el plano creo que es un concepto que todos más o menos manejamos, es como una superficie que se extiende en todas las direcciones y allí pues se consideran puntos, se consideran rectas y se pueden considerar posiciones relativas de puntos y rectas. Lo de afín es un adjetivo que se pone para ver qué cosas vamos a estudiar con esos puntos y esas rectas, qué tipo de relaciones se pueden establecer entre ellos.

Entonces hay relaciones que prácticamente todos realizamos muchas veces, por ejemplo, medir. Entonces, bueno, pues uno casi es lo primero que aprende, pues es coger una regla, acercarla a un segmento y decir, bueno, pues este segmento mide 5 centímetros. Bueno, pues eso es lo que no se puede hacer en el plano afín, es decir, que en el plano afín todavía no es un plano donde no se tienen instrumentos de medida, entonces simplemente se pueden establecer relaciones de decir si un punto está dentro de una recta, si dos rectas se cortan o bien son paralelas.

Entonces estos son los problemas estudiados en el plano afín. Entonces, ¿qué es necesario saber en esta lección? Pues en primer lugar el concepto de coordenadas de un punto. Es un

concepto que está muy relacionado con lo que hemos visto antes de coordenadas de un vector.

En realidad lo que se hace es, en primer lugar, a un punto se le asocia un vector y después a ese vector se le asocian unas coordenadas y esas son las coordenadas del punto. Y entonces, bueno, pues el método para asociar coordenadas a un vector pues viene dado en función de una base. Entonces elegir un sistema de referencia o una base adecuada pues puede cambiar las coordenadas.

Entonces es lo primero que hay que aprender cómo hacer corresponder a puntos que son objetos geométricos primero números. Después ya hemos dicho que los elementos además son las rectas. Bueno, pues también las rectas vienen dadas por ecuaciones algebraicas.

Entonces hay que definir qué es una recta pero en ecuaciones. Entonces, bueno, pues tienen que saber que una recta es una expresión o viene dada por una expresión de la forma $5x + 2y$ igual a 2. Entonces, ¿qué quiere decir eso? Pues que todos los puntos o todos los pares x e y que verifiquen esa ecuación pues van a darnos coordenadas de puntos que están dentro de la recta. ¿Y qué dificultades tiene este tema? El alumno, ¿qué es lo que más difícil le va a ser al estudiar? Bueno, pues yo creo que la dificultad está en esa interrelación entre una parte de geometría que es algo que ve, algo que está más o menos en la realidad cotidiana y por otra parte el álgebra.

Después esto pues pasarlo a ecuaciones y pasarlo a operaciones algebraicas. Pero una vez supera ese paso, esa, digamos, esa algebrización, pues es una aplicación de cosas que ya ha estudiado antes. Entonces, realmente ese paso, si consigue ver esta transición o esta traducción, las dificultades en todo caso provendrán de dificultades que tenía en otros temas.

Por lo tanto, es muy importante cuando llegan a este tema, pues sepan muy bien los temas anteriores, sobre todo la unidad didáctica 3. Esa la tienen que haber dominado bien, en particular lo que eran coordenadas de vectores, las operaciones con vectores y los sistemas de ecuaciones. Quizá entonces lo más difícil sea plasmar una abstracción en algo más concreto. Efectivamente, eso es lo que y realmente lo que además queremos que ellos sean capaces de hacer es después, cuando se les dé la ecuación de una recta o de un par de rectas, pues que sepan qué operaciones y qué es lo que tienen que hacer algebraicamente para saber cómo son esas dos rectas, o sea, cuál es su posición relativa, pues si esas rectas se cortan o si son paralelas.

Entonces, bueno, pues simplemente en este caso tienen que reducir el problema a un problema algebraico de una resolución de un sistema. Entonces, bueno, pues tienen que volver otra vez a utilizar los sistemas de ecuaciones. Cuando hemos empezado este programa hemos hablado de tres temas dentro de esta unidad didáctica, sin embargo, esta unidad didáctica tiene cuatro.

Efectivamente. El segundo tema sería el espacio fin que no entra en el examen. Bueno, esto sólo comentar que ya no es el primer año en que esto ocurre y que la verdad es que el tema o

el temario es muy amplio y por algún sitio pues hay que un poco aligerarlo, sobre todo por cuestiones de tiempo y de dificultad para el alumno.

Entonces, no es que el tema del espacio fin sea menos importante o más importante que otros temas, sin embargo, bueno, pues se ha suprimido porque considerábamos que era un tema que su supresión no afectaba a continuar el estudio posterior. Aunque, bueno, pues por ejemplo yo mismo soy de formación geómetra y entonces, bueno, pues me ha fastidiado mucho, por así decir, el que se elimine un tema de geometría. Pero, y debo decir que es muy importante y que realmente, pues la geometría espacial, pues para una persona que vaya a estudiar una ingeniería, pues es de vital importancia.

Conviene, por tanto, que el alumno se lo mire o lo lea, aunque no... A título informativo, por supuesto, y es más, les diría que mientras que en el resto de las materias, pues bueno, esto es una pequeña introducción, pues si hay alguna parte de las matemáticas donde van especialmente faltos es en geometría, porque realmente no solamente el hecho de no haber estudiado el espacio afín, sino el hecho de solamente estudiar algo que es afín, o sea, que simplemente se estudian relaciones, las relaciones más sencillas entre los elementos geométricos, es decir, si se cortan o si son paralelas, pero por supuesto, pues no se ha visto pues cómo se define una medida en matemáticas, utilizamos también fórmulas o bien cómo establecer la medida de un ángulo o todo tipo de propiedades, pues quizá más usuales incluso. Quizá la geometría se ha dejado un poco a un lado, es un amplio programa, ¿no? Claro, es amplio el programa y bueno, pues quizá pues por algún sitio había que cortar, entonces en este caso pues ha sido casi de una forma más accidental que quizá motivada o dirigida, ¿no? Podemos pasar ahora a los polinomios, ¿qué es un polinomio? Pues un polinomio es una expresión de la forma, por ejemplo, $7x$ al cubo más $2x$ al cuadrado más $3x$ más 1 , eso es un polinomio, entonces bueno, pues es una expresión de esa forma y es simplemente eso, o sea, que no deben asustarse por la palabra, que bueno, pues parece una cosa extraña, aunque no lo es tanto, porque ya se habla de polinomios hasta en el telediario, pues a veces se habla de los polinomios. Entonces, ¿qué es lo que se puede hacer con un polinomio? Pues casi lo mismo que se puede hacer con los números.

Se puede operar, se puede sumar, se pueden restar, se pueden multiplicar, e incluso se pueden dividir. Esto es lo que se le va a pedir al alumno, quizá. Efectivamente, entonces lo que el alumno tiene que saber con los polinomios es hacer estas operaciones algebraicas y un poco, pues, aquí vamos a ver cómo retomamos esa idea de la operación.

No sé si se recuerdan, pero cuando hablábamos de lo que era una operación, lo que era una ley de composición en la unidad didáctica 1, pues decíamos pues que en aquel momento pues era un poco difícil, porque no iban a poseer suficientes ejemplos para darse cuenta de lo que era. Entonces, prácticamente el único ejemplo que se tenían eran los números y hacer operaciones entre números. Pero aquí ya vemos otros elementos, otros objetos, entre los cuales se pueden establecer operaciones, que son los polinomios.

Entonces, queremos, es importante que observen cómo es posible establecer operaciones entre otras cosas y eso da lugar a que los matemáticos hayan hecho una abstracción y después hayan definido en un campo más general el concepto de operación. Y eso era lo que motivaba su estudio en la unidad didáctica 1. El alumno, por tanto, lo que debe hacer es hacer operaciones cuando lleguen a los polinomios. Efectivamente, pues tiene que saber, ya digo, multiplicar polinomios.

Simplemente, pues es un cálculo, pues, parecido al de multiplicar dos números entre sí o también dividir polinomios. Incluso, bueno, pues hallar el máximo común divisor de los polinomios o reducir una fracción. Y también un punto importante es saber lo que es la raíz de un polinomio.

La raíz de un polinomio o las raíces de un polinomio son aquellos números que cuando se sustituyen por la variable que tiene el polinomio, pues el polinomio se anula. En el caso de la ecuación de segundo grado, pues las raíces de una ecuación de segundo grado son aquellas soluciones que anulan también ese polinomio, que en este caso tiene grado 2. Por lo tanto, saber operar y también el concepto de raíz. Y recuerden cómo se hacían las ecuaciones de segundo grado.

Recuerden o sepan también, eso son todas las cosas que tienen que saber, que si un polinomio tiene una raíz, por ejemplo, diciendo que ese polinomio es divisible por otro polinomio, que es $x-3$. ¿Alguna cosa más de los polinomios? Bueno, yo creo que con estas ideas tienen lo más importante. Y pasamos entonces a las fracciones racionales.

Efectivamente, bueno, pues fracciones racionales quiere decir que cuando es algo parecido a lo que ocurre con los números. Nosotros tenemos los números enteros, entonces, bueno, pues también se pueden multiplicar, se pueden sumar. Pero hay veces en que no se pueden dividir, porque bueno, pues uno entre tres, pues uno los divide, pero lo que le resulta no es un número entero.

Entonces, lo que puede hacer es expresarlo en forma de fracción. Pues lo mismo ocurre con los polinomios. Hay veces en que se pueden dividir y el resultado es otro polinomio.

Y hay veces en que cuando se dividen dos polinomios, pues la mejor forma de expresar el resultado es de nuevo una fracción, donde aparece un polinomio en el numerador y un polinomio en el divisor. Bueno, pues esas son las funciones racionales. Un cociente entre dos polinomios.

¿Qué dificultades va a encontrar el alumno? Bueno, entonces, quizá el alumno, pues una dificultad es que si va siguiendo el texto base, pues al principio le aparece algo que se llama cuerpo de fracciones, que viene explicado en el texto base. Entonces, yo diría que está bien si ya se lo consigue entender, pues magnífico. Pero que no pongan demasiado énfasis, que no se preocupen demasiado.

O sea, que esa parte pueden obviarla y pasarla por encima. Y lo que realmente es importante en este tema es que sepan descomponer una fracción de polinomios, o sea, una función racional, la sepan descomponer en fracciones simples. Es decir, por ejemplo, si tienen una fracción de la forma $3x$ partido por $5x$ al cuadrado más $2x$ menos 1 , pues que sepan que esa fracción de dos polinomios se puede descomponer en una fracción de la forma a partido por x menos una de las raíces del polinomio, más b partido por x menos la otra raíz del polinomio divisor.

Estas son las dificultades que se pueden encontrar. Este tema, esta unidad 4, es más corta. Un tema ha desaparecido, nos quedamos en tres, es más corta.

Y hemos llegado al ecuador prácticamente del temario. Pero antes de pasar a repasar las tres primeras unidades didácticas, queda algo más que decir, algo importante de esta unidad didáctica número 4. Bueno, sí, quisiera decir que las fracciones racionales tienen su mayor importancia después en las aplicaciones que se hace de ellas en el cálculo de primitivas. Después se verá que una técnica de integración muy usual es utilizar la descomposición en fracciones simples de las fracciones racionales.

De esta forma se pueden integrar cocientes de polinomios y es la forma usual. Además es un ejercicio bastante bueno porque ya se verá que el alumno tiene que saber esta técnica de integración, tiene que conocer lo que quiere decir hacer la integral de una función. Después tiene que conocer este tema de fracciones racionales.

Y luego cuando se descompone una función racional tiene que resolver un pequeñito sistema. Entonces también tiene que aplicar otra unidad didáctica más. O sea que es un problema interesante que después cuando llegue a integración va a tener que hacer.

Por lo tanto no lo olvide, en este momento ejércitese en los ejemplos que vienen en el libro o en el libro de problemas y sobre todo aprende esa técnica. Bien, y ahora como hemos dicho que estamos prácticamente a la mitad del curso y hemos visto estas cuatro unidades didácticas, ¿podríamos ver qué es lo más importante? ¿Repasar un poco unidad por unidad lo que es más importante y lo que el alumno ahora es el momento de que ya repase antes de proseguir? Bueno, yo de todo lo que se ha visto pues sí que pongo gran énfasis en el asunto de los sistemas de ecuaciones lineales. Incluso ya en esta unidad didáctica 4 pues hemos visto que vuelven a aparecer.

Y en el plano afín pues resulta que para saber las posiciones relativas de dos rectas pues al final lo que tienen que hacer es resolver un sistema. Para hacer una descomposición en fracciones simples pues también tienen que resolver un sistema. O sea que eso casi están obligados a ello.

Sin embargo pues luego cuando vayan avanzando un poco en el curso pues ya no van a tener que hacer constantemente alusión a ello pero yo les recomendaría que continuaran haciendo. Es decir que la técnica de resolver un sistema de ecuaciones la tengan siempre fresca. Bueno, eso en cuanto digamos el punto más importante.

Después más en general pues yo diría que también los conjuntos pues es algo que continuamente va saliendo. Entonces, bueno, pues no es necesario que continúen haciendo énfasis. Bueno, pero recuerden también el tema de probabilidad y el tema de matrices determinantes con el hecho de que se utiliza para lo de los sistemas de ecuaciones lineales.

Y bueno, pues yo creo que esos son los temas más, por lo menos más socorridos después en los exámenes y que les van a sacar mayor partido. Hacer énfasis entonces en las ecuaciones lineales y también en los conjuntos. Que eso se sigue viendo a través de todo el temario.

Sí, bueno y ya digo también de la lección de probabilidad, que no la olviden. ¿En cuanto a la unidad didáctica número 2 y número 3? Bueno, pues la unidad didáctica 2 pues un poco continuar de vez en cuando recordando algún ejercicio sobre límite de sucesiones. Aunque después en la unidad didáctica 5 pues se va a volver a hablar del límite.

Entonces, bueno, pues eso va a refrescarse un poco. Y en cuanto a la unidad didáctica 3 ya digo lo de los sistemas. Y bueno, según se van haciendo sistemas pues uno se va dando cuenta de nuevo.

Va teniendo que recordar pues el concepto de matriz determinante, de rango. Y al fin y al cabo pues se hace después algún problema de plano afín. Pues también tiene que tener más o menos claro pues el concepto de lo que eran vectores, de la problemática de los espacios vectoriales.

Deben ya ir repasando todo esto antes de continuar. ¿Conviene que lo repasen? Sí, yo creo que sí, que siempre es interesante que tengan claros estos conceptos. Aunque después a partir de la unidad didáctica 5 hemos de decir que cambia completamente la orientación del curso.

Empieza lo que se llama el cálculo infinitesimal o el análisis matemático que es algo un poco diferente. Sin embargo, pues sí que diría que es importante que estos conceptos luego no los olviden. Y además, por ejemplo, el concepto de límite pues va a tener una generalización ahora para el concepto de límite de función.

Que después va a dar lugar a todos los conceptos de función continua, de derivada y después del de derivada al de integral. En todos los programas decimos que es un curso, un temario muy práctico y que deben hacer muchos problemas. Es así, ¿no? Tienen que seguir haciendo problemas de lo de detrás a la vez de lo que van estudiando, ¿no? Por supuesto, o sea, tienen que continuar ejercitándose en esos puntos que hemos dicho que son un poco los más usuales, ¿no? Los que luego después se les pide más, ¿no? Bien, y hablando precisamente de esta prueba final, del examen final, en esta unidad didáctica número 4, ¿qué es lo que se les suele pedir? ¿Algún ejemplo de problema o...? Bueno, no voy a decir los problemas del examen, pero voy a decir algunas cosas o algunos ejercicios que han aparecido en otros años.

Entonces, por ejemplo, en el caso del plano afín, pues es un ejercicio que suele... o que ha aparecido en otros años. Pues, por ejemplo, dadas las ecuaciones de dos rectas, puedes saber

cómo están situadas, es decir, si son paralelas o si se cortan. Para ello, pues lo único que tienen que saber es que cada ecuación significa una recta y que entonces lo que tienen que hacer es resolver un sistema.

Y si ese sistema tiene una solución única, pues quiere decir que las rectas se cortan y la solución les da el punto de corte. O bien también les pueden pedir que construyan la ecuación de una recta que pasa por un determinado punto y es paralela al otro. O bien que digan un vector de dirección de una recta.

Entonces, estos son los problemas más usuales del caso del planoazín. Entonces, bueno, son todos ellos, se resuelven fácilmente y realmente necesitan muy poco cálculo. Entonces, bueno, pues suelen ser más bien puestos en las cuestiones previas de las que suele costar el examen.

Más que nada lo que tienen es una dificultad de concepto, ¿no? Pues de primero haber sabido lo que es la ecuación de una recta, lo que es un punto en el plano. Esa es la dificultad principal. Después, en cuanto a polinomios, pues en ocasiones hemos tenido entre los problemas multiplicar dos polinomios, dividir dos polinomios o bien hallar el máximo común divisor de dos polinomios.

Entonces, esto pues son operaciones que ya digo que son igual que cuando se hace con números. Lo que ocurre es que, bueno, tienen ahora un poquito más de dificultad al ser estas expresiones algebraicas. Y tienen, pero vamos, uno que sabe realmente el mecanismo, pues realmente es un mecanismo sin más.

Es aplicar un algoritmo y ya está. ¿Esto estaría dentro de los problemas o de las cuestiones, por ejemplo? También esto sería dentro de una cuestión porque realmente es como si le ponen a uno una cuenta de multiplicar. Realmente, si uno sabe hacerlo, pues no le lleva más que unos minutos.

Es de resolución rápida. Es de resolución rápida y realmente incluso de pensar poco. Y por último, pues de las fracciones racionales, pues en alguna ocasión ha habido alguna fracción racional que había que descomponer en fracciones simples.

Para ello, pues lo único que hay que hacer es saber primero las raíces del denominador que normalmente es una ecuación de segundo grado. Por lo tanto, pues tienen que resolver una ecuación de segundo grado. Y después saber que con esas raíces, pues el polinomio se puede descomponer, como hemos dicho antes.

Es decir, como una suma de dos fracciones donde el denominador en cada caso tiene grado 1 o grado 2. Y entonces, bueno, pues una vez hacen esa descomposición, pues para hallar los coeficientes que tienen que poner en los numeradores de las fracciones más sencillas, tienen que resolver un pequeño sistema. Esto pues a veces ha caído simplemente así en el examen. Es decir, una cuestión de simplemente reducir a fracción racional.

Y otras veces lo que ocurre es que lo que les ha exigido es una integral de una función racional.

Y entonces, claro, lo que han tenido que hacer es también descomponer en fracciones simples. Entonces, bueno, pues aunque no era una descomposición en fracciones simples, lo han tenido que hacer.

Entonces, bueno, pues normalmente si era una descomposición en fracciones simples, pues eso solía ser una cuestión. A veces, bueno, ya si ya es una integral, pues eso ya podía ser incluso motivo de un ejercicio de los que ya puntúa más. Yo creo que esta unidad didáctica número 4 ha quedado bastante clara.

En el próximo programa veremos la unidad didáctica número 5 que explicaremos entonces. Pero ¿es conveniente que el alumno se lea previamente algo, previamente a oír el programa para que le sirva de apoyo? Sí, recuerde entonces el alumno sobre todo el concepto de límite y lo que era un número real. Entonces, bueno, quiero recordar que, bueno, pues en la lección sobre números reales, pues ya decíamos que la introducción de los números reales que hay en el texto base, pues es una introducción que está bien y que es perfecta.

Lo que ocurre es que quizá, bueno, pues es difícil de entender perfectamente, ¿no? Porque, bueno, pues está hecho a un nivel bastante elevado. Entonces, lo que es casi suficiente con tener es que el concepto de número real que va a precisar, pues es que es un número que puede tener infinitas cifras decimales. Y, bueno, pues quizá a lo mejor a partir de alguna de ellas, pues todas las demás son cero.

O bien tiene infinitas cifras decimales, pues como ocurre con algunos números, que no se sabe ninguna ley para ir obteniendo esas cifras decimales. Bueno, pues eso es un número real. Pero es imprescindible que se sepa esto para... Tienen que saber lo que es un número real, porque luego lo que vamos a hacer va a ser un estudio de funciones.

Y funciones son aplicaciones que van del conjunto de números reales en el conjunto de los números reales. Entonces, si no saben lo que es un número real, pues malamente van a hacer esto. También tienen que saber lo que es una aplicación, porque estamos diciendo que una función es una aplicación de un conjunto en otro.

Entonces, también recuerden el concepto de aplicación. Por lo tanto, recordar el concepto de aplicación y el de número real antes de estudiar a fondo, ¿no? También yo diría que el concepto de límite, límite de una sucesión, que era otra de las cosas que se había visto en la unidad didáctica 2, porque ahora se va a ver el límite de una función. Entonces, es un concepto que es un poquito todavía más difícil que el límite de una sucesión.

Si ya el concepto de límite de una sucesión era difícil, pues este todavía lo será más. Entonces, conviene que lo hayan repasado, se lo preparen un poco, y ya por lo menos les será quizá más accesible. Bien, esto será en el próximo programa.

Muchas gracias y buenas noches. Buenas noches. Y ya tenemos que despedirnos.

El próximo programa de Matemáticas Especiales será el 2 de marzo, y en él hablaremos de la

quinta unidad didáctica. Gracias por su atención y muy buenas noches. La UNED les ha ofrecido dos horas y media de radio educativa.

La mañana volveremos a nuestra hora habitual, 8 y media de la noche, 7 y media en la Comunidad Canaria, en esta misma emisora. Comenzaremos con Revista de Derecho y continuaremos con el informativo semanal de la UNED. Nuestro último programa será el curso de acceso.

Gracias por su compañía y feliz descanso.