

AC 15 19

Matemáticas especiales, la integral. Fecha de emisión, 28 de mayo del 80. Vamos a continuar en esta emisión con los conceptos fundamentales del cálculo, viendo la idea de integral.

Primeramente, vean un momento la figura 11 de la ayuda escrita de este guión. Como ustedes recordarán, es el mismo dibujo que empleamos para definir la derivada de una función en un punto A. En la figura 11, tienen ustedes escrita la definición de derivada. En realidad, f' de A es únicamente el valor que toma una función derivada, f' de x , en el punto A. Examinen ahora la figura 12.

Tenemos por una parte el dominio de definición de la función f de partida, al que hemos llamado D . Consideremos el conjunto de valores del dominio D , en los cuales es posible hacer el límite que antes vimos, es decir, calcular la derivada. A este nuevo conjunto de valores le llamaremos D' , que evidentemente está contenido en D . Según creo recordar, D' era el dominio en el cual definíamos la función f' . ¿No es así? En efecto.

Una vez definido el dominio D' , hacemos corresponder a cada punto x de este dominio el valor de la derivada de f en dicho punto. Tenemos así definida la función derivada f' de x . En la figura 12, tienen el esquema del razonamiento seguido. Entramos de lleno ahora en el tema de esta emisión, es decir, el concepto de integral.

Hasta ahora, el problema que teníamos era el siguiente. Dada una función f de x , hallar otra función g de x tal que f' de x , o sea, la derivada de f , coincidiera con g de x . Es decir, dada f de x , encontrar su derivada. Vamos a estudiar ahora, en cierta forma, el problema inverso.

Dada una función f de x , se tratará de hallar otra función h de x tal que h' de x sea igual a f de x . Esta función h de x , si existe, es una de las primitivas de f de x . Usted ha dicho una de las primitivas. ¿Es que hay varias? Si se da usted cuenta, la derivada de la función constante es siempre nula. Entonces, si a la función h de x le sumamos una constante cualquiera, por ejemplo, h de x más c , ¿cuál sería su derivada? Como la derivada de la suma de dos funciones es la suma de las derivadas, la derivada de h de x más cero será h' de x más cero.

O sea, h' de x . Es decir, la derivada de h de x es igual a la derivada de cualquier otra función obtenida sumando a h de x una constante cualquiera. Como se ve, tanto h de x como la nueva función h de x más c tienen la misma derivada. Es decir, que al derivar ambas obtenemos f de x . O sea, que las dos funciones son primitivas de f de x . Todo esto está esquematizado en el apartado 13 de la ayuda escrita de la presente emisión.

Estamos en condiciones ahora de introducir la noción de integral indefinida. Al conjunto de todos los primitivos de una función le llamamos integral indefinida de la función f . Se expresa como viene en el apartado 14 de la apoyatura escrita. Examinen ustedes un momento este apartado.

La expresión que acaban ustedes de ver se lee de la forma siguiente. Integral de la función f de x , diferencial de x , es igual a h de x más c . Con c queremos significar una constante cualquiera. Es decir, para cada valor de c obtenemos una función distinta para la expresión de la integral.

El significado de diferencial de x lo verán más adelante. Por ahora nos basta saber que se utiliza como notación dentro del signo integral. Hay funciones de las cuales podemos hallar su primitiva fácilmente.

Por ejemplo, la integral de la función x sabemos que es la función x cuadrado partido por 2 más c . Ya que la derivada de x cuadrado partido por 2 sabemos que es x . Igual que en este caso existen otras funciones cuya integral es inmediata. En ayuda escrita les enviamos una colección de estas integrales que se suelen llamar inmediatas. Conviene que las sepan de memoria.

Integrales más complicadas se resuelven bajo sistemas más o menos sofisticados que nos transforman la integral propuesta en otras más sencillas. Que suelen ser del tipo de las de la tabla que les mandamos. Los sistemas para la resolución de integrales, de los cuales los más conocidos son los métodos de integración por sustitución, por partes, descomposición en fracciones, racionales, etc.

están explicados en las unidades y en cualquier libro elemental de cálculo. Veo que puede ser útil esta tabla de integrales inmediatas. Pero reconozco que hay muchos símbolos que no sé lo que significan.

A mí me pasa lo mismo. Es verdad, he olvidado decirles que la verdadera utilidad de esta tabla vendrá para ustedes cuando conozcan las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Estas funciones se estudiarán más adelante.

Pasemos ahora a ver otro problema relacionado con el concepto de integral. En la figura 15 de la apoyatura tienen ustedes dibujada la gráfica de una función f . Consideramos ahora los puntos a y b del dominio de f y sus imágenes f de a y f de b . Supongamos el siguiente problema. Queremos hallar el área rayada de la figura, es decir, el área comprendida entre la curva que describe la función f y las rectas x igual a a y x igual a b , paralelas al eje f de x y al eje x . Observen en la figura 15 cuál es esta área.

Creo que está claro cuál es el área que queremos hallar. Efectivamente es un problema desconocido para nosotros hasta ahora, ya que la figura de la cual queremos hallar el área tiene un lado curvo. En efecto, precisamente para resolver este problema es para lo que vamos a introducir el concepto de integral definida.

Supongamos que dividimos el intervalo cerrado a, b en un número cualquiera de partes. Por ejemplo, en nuestro caso lo haremos en 6. A cualquier subdivisión de este tipo la llamaremos partición del intervalo cerrado a, b . En la figura 16 de la apoyatura tienen ustedes la gráfica de la función f , el intervalo cerrado a, b y una partición de él mediante la cual lo dividimos en 6 partes. Vean un momento la figura.

Como pueden ver en esta figura aparecen dibujados unos rectángulos con base en el eje x y con uno de sus vértices superiores en la gráfica de f . ¿Cuál sería el área del rectángulo de base a , $x_{sub 1}$? El área de un rectángulo es la longitud de la base por la altura. La base es $x_{sub 1}$ menos a y la altura es f de a . Luego el área del rectángulo será f de a por $x_{sub 1}$ menos a . Perfectamente. Para otro rectángulo cualquiera, por ejemplo aquel cuya base es $x_{sub 1}$, $x_{sub 2}$, el área será $x_{sub 2}$ menos $x_{sub 1}$ por f de $x_{sub 1}$. En general, si la partición tuviera n puntos y sumamos todas las áreas de estos rectángulos, el valor obtenido será evidentemente más pequeño que el del área delimitada por la curva, que es la que queremos hallar, pero será próximo a él.

Esto es lo que se llama una aproximación por defecto. Si hiciéramos figuras similares pero con más puntos en la partición, es decir, si dividiéramos el intervalo a , b en un número mayor de partes, la suma de las áreas de los rectángulos se aproximaría más al área que queremos hallar. Es decir, que cuanto más pequeñas sean las divisiones del intervalo a , b , mayor es el grado de aproximación al área que queremos hallar.

Exacto. En la figura 17 tienen ustedes la misma partición, pero consideramos rectángulos distintos. El primero, por ejemplo, tiene la base en a , $x_{sub 1}$ y la altura vale f de $x_{sub 1}$ en lugar de f de a , que era la que considerábamos antes.

El área será f de $x_{sub 1}$ por $x_{sub 1}$ menos a . Igualmente podríamos hallar el área de cualquiera de los rectángulos dibujados. Examinen brevemente la figura. Entonces las áreas de estos rectángulos serán mayores que las de los rectángulos que construíamos antes, ¿no es así? Eso es, por eso mismo la suma de las áreas de todos estos nuevos rectángulos será mayor que la suma anterior y mayor que el área delimitada por la curva.

Es lo que llamaremos una aproximación por exceso al área que queremos hallar. Igual que en el caso anterior, cuando aumenta el número de divisiones del intervalo nos aproximamos más al área limitada por la curva. O sea, que cuando aumentamos el número de subdivisiones, las áreas por defecto y por exceso tienden hacia el mismo número.

En efecto, cuando aumentamos el número de puntos de la partición en el límite, la suma de las áreas de los rectángulos pequeños y de los grandes tienden al mismo número. Ese número coincidirá con el área delimitada por la curva y que queremos hallar. Pues bien, ese límite común es lo que llamamos integral definida de f entre a y b . Vean por último la figura 18, en la cual tienen ustedes dibujados los rectángulos pequeños y grandes juntos, así como la forma matemática mediante la cual expresamos la integral definida de una función f entre a y b . Como siempre, les recomendamos que lean con más detalle este tema en su libro de texto.