

Matemáticas complementarias. Consideraciones sobre el concepto de número. Emisión 32. Ya hemos hablado de los números naturales, enteros y racionales. Hemos estudiado la aparición de los mismos, fundamentada en la necesidad de poder realizar una serie de operaciones cada vez más complicadas. Ahora, con motivo de estudiar un nuevo tipo de números, vamos a recordar algunos aspectos vistos en las emisiones anteriores. Antes de nada, conviene recordar que el concepto de número es conocido por el hombre desde las épocas más remotas,

de la historia de la humanidad. A pesar de ello, su formulación correcta se produce a finales del siglo XIX y comienzos del XX. Aunque en un primer análisis dicho concepto parece ser innato en el hombre, de aquí el adjetivo natural que se le añade, no es así en un análisis más profundo. Se han encontrado pueblos en estado primitivo en los cuales no existe este concepto de número natural. Algunos sólo distinguen entre conjuntos con un solo elemento, conjuntos con dos elementos, y todos los demás conjuntos son indistinguibles para ellos con respecto al número de sus elementos, por lo que podemos afirmar que no aparece entre estos pueblos el concepto de número natural. Sin embargo, puede observarse que en las civilizaciones más avanzadas este concepto está bien desarrollado, pudiendo así afirmar una relación entre el desarrollo de un pueblo y su dominio en el concepto de número. De aquí la importancia de la corriente.

de pensamiento que llevó a algunos destacados matemáticos a la axiomatización de este concepto. Ya en 1884, Frege, matemático alemán, formuló correctamente estos conceptos, aunque dicha formulación no fue puesta en relieve hasta que el filósofo inglés Bertrand Russell la descubriera en 1901. Tradicionalmente se ha venido, sin embargo, utilizando la axiomática de Peano para definir el conjunto de los números naturales, con la cual, a partir de cinco axiomas, se puede generar el conjunto de los números naturales. Podemos empezar, después de esta consideración histórica, a recordar los conceptos de número vistos anteriormente. Me parece estupendo. Pero antes, yo creo que conviene recordar que nosotros no hemos utilizado la teoría axiomática para la construcción de los distintos tipos de números. ¿Por qué? No lo hemos hecho fundamentalmente por nuestra preocupación didáctica. Hemos intentado

manejar el mayor número de veces posible los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos. ¿Se acuerdan nuestros alumnos de cómo construíamos el conjunto de los números naturales? En el conjunto de los conjuntos definíamos una relación binaria entre ellos del siguiente modo. Dos conjuntos se dicen que son equipotentes si existe una biyección o correspondencia biunívoca entre ellos. Bueno, pero pienso que si no hacemos alguna aclaración resulta incompleto este punto de partida. Usted decía, señorita, dos conjuntos se dice que son equipotentes si existe una biyección o correspondencia biunívoca entre ellos. Hagamos esa aclaración. Realmente esta relación binaria es una relación de equivalencia. Como consecuencia podemos formar el conjunto de las clases de equivalencia o conjunto cociente. A cada una de estas clases se le da la función de equivalencia. Gracias.

estas clases de equivalencia la llamaremos cardinal de un conjunto. Demos por supuesta entonces la definición de número natural y el conjunto de los números naturales. Si así lo suponemos ya, surge una pregunta de inmediato. ¿Qué leyes de composición interna se pueden definir en dicho conjunto? Para definir una ley de composición interna en un conjunto es necesario que, dados dos elementos cualesquiera del mismo, a través de un criterio adecuado, podamos asociarles otro elemento que también pertenece a dicho conjunto. Esto supone que se pueden

definir tantas leyes de composición interna como se pueden definir en un conjunto. Se puede definir una ley de composición interna como queramos, con tal que verifiquen lo que acabamos de ver.

de enunciar. Totalmente de acuerdo. Pero para concretar un poco, pensemos en las denominadas operaciones fundamentales. Suma, resta, producto y división. ¿Cuál de estas operaciones constituye una ley de composición interna en el conjunto de los números naturales? Yo creo que solamente la suma y el producto son auténticas leyes de composición interna. ¿Por qué? Porque dados dos números naturales, su suma es otro número natural. De la misma manera, dados dos números naturales, su producto es otro número natural. De acuerdo. Pero, ¿por qué la resta y la división no son leyes de composición interna en el conjunto de los números naturales, señorita? Es evidente que al restar dos números naturales no obtenemos en general otro número natural. Solamente ocurre esto cuando el primer número es mayor que el segundo. Explíquese mejor. ¿Por qué? Porque el primer número es mayor que el segundo. Explíquese mejor.

Quiero decir que 4 menos 2 es el número natural 2. Ajá. Pero 3 menos 7 no es ningún número natural. Menos 4 no es un número natural. Análogamente, la división o cociente de números naturales solamente es posible en algunos casos, pero no de una manera general. Ponga un ejemplo. 16 dividido entre 2 es el número natural 8. No ocurre lo mismo al dividir 21 entre 4. Muy bien. Ya hemos repasado la aparición de los números naturales fundamentales para comprender la aparición de otros tipos de números. Escuchemos el proceso seguido para ampliar este concepto de número. Díganos usted algo, señorita. Aunque siguiendo la línea algebraica anterior, podríamos efectuar las ampliaciones sucesivas del concepto de número de un modo formal, no nos daría esta línea de razonamiento las necesidades que han llevado a las matemáticas a otras. ¿Qué es lo que se llama ampliación?

Por ello, vamos a dar estas ampliaciones sucesivas desde el punto de vista de las necesidades prácticas que pudieran haberlas motivado, dejando para el final el presentar un breve boceto del modo como hoy se concibe esta ampliación en el campo de las matemáticas. Bueno, una breve pausa ahora y sigamos un poco con la historia. Destacamos, primeramente, que sólo el concepto de número natural es el que ha sido bastante bien asimilado por el hombre en la mayoría de las civilizaciones y profundamente utilizado. Sin embargo, todas las ampliaciones del concepto de número han pasado al dominio del conocimiento en sólo unos pocos humanos a lo largo de los años. Así, podemos ver que la profesión de cambista ha tenido una gran importancia. Y debido, principalmente, a las dificultades aritméticas que estas operaciones llevaban consigo, por el manejo de números racionales.

Otro punto que destacar es la posición del juez entre los árabes. La herencia, debido al código coránico, tiene muchas dificultades para su división y por ello en los pueblos islámicos estos jueces tenían una posición especial dada su facilidad de realizar estas reparticiones. También en esta ocasión existe la dificultad de trabajar con números racionales. Conviene destacar para terminar que estas dificultades operativas de las diversas ampliaciones del concepto de número no han sido superadas hasta en época muy reciente y debido principalmente a la sistematización de las sucesivas ampliaciones. Como muestra podemos indicar que en pleno siglo XVIII Nepper creó una especie de tablitas, anticipación de lo que luego serían las reglas de cálculo, para que sus contemporáneos pudieran realizar con relativa facilidad los productos y divisiones. Por todo lo que

acabamos de exponer...

se puede deducir que las ampliaciones del concepto de número son, sin duda, problemas que de un modo u otro se le habrán presentado a muchos hombres a lo largo de la historia y que en algunas ocasiones dio lugar a una visión de números de más amplio campo de acción. Pensemos en la aparición de los números enteros. Imaginemos un gran almacén que empaqueta cierto producto. En cada paquete, según se desvíe del peso exacto, en más o en menos, se le pone el signo más o menos para indicar el sentido de la desviación, además de un número para indicar la desviación en magnitud. El uso de este tipo de números llegó a su total generalización con un monje franciscano italiano en el siglo XV. Este monje estableció un sistema para desarrollar adecuadamente una contabilidad. En cualquier momento, al desarrollar un balance, debido a las malas gestiones comerciales, pueden existir perfecciones. Pérdidas.

Las pérdidas se reflejaban con números naturales afectados del signo menos. Así aparecen los números enteros, menos 3, menos 2, menos 1, 0, más 1, más 2. Estos números son una ampliación del conjunto de los números naturales. Basta pensar que en este conjunto de los números enteros están incluidos los números naturales. Concretamente, los números enteros positivos coinciden con los números naturales. Bien, vamos a cerrar este paréntesis histórico y volver a la realidad de la matemática. Señorita, matemáticamente, ¿cómo pueden aparecer estos números, los números naturales? Ya habíamos dicho que los números enteros nacían de la imposibilidad de restar dos números naturales en cualquier caso. Si de los dos números que íbamos a restar, el primero era mayor que el segundo, no existía ninguna dificultad.

el resultado era otro número natural. Pero cuando el segundo era mayor que el primero, no obteníamos un número natural, obteníamos un número natural precedido del signo menos. Sí. Además hoy existe la necesidad de ampliar el concepto de número natural. ¿Cómo se le da a forma matemática? Considerando pares ordenados de elementos. Estos pares ordenados están integrados por números naturales. Es evidente que de todos los posibles pares ordenados, existen muchos que pueden representar a la misma diferencia. Esta circunstancia la tenemos presente definiendo una relación de equivalencia entre todas las parejas. Decimos que dos de estos pares ordenados son equivalentes cuando representan al mismo número entero. Muy bien. Pues sí, efectivamente. Tenemos ya que terminar. Pero como quedan unos segundos, vamos a señalar finalmente puede ser que uno de ellos Pattin está haciendo el mismo absolutamente in♦♦릴ito interferencia некотопa, pero en el caso de lab y sus siguientes diverse maxi expediciones, los visitas de their nomouning a esta sala estarían en appetite y te podrían concertar poca a laama y aun en punta de su aludarse. ¿El color real sin existencia de dirección Tree 所以被統一.

el conjunto de los números enteros y el número entero. Las clases de equivalencia, consecuencia de la relación de equivalencia antes indicada, representan a los números enteros y el conjunto cociente es el conjunto de los números enteros. Repitamos un poquitín más ralentizado. Las clases de equivalencia, decía usted... Consecuencia de la relación de equivalencia antes indicada, representan a los números enteros... Muy bien. Y el conjunto cociente es el conjunto de los números enteros. De acuerdo. Vamos a terminar. En la próxima emisión continuaremos ampliando el concepto de número. Gracias. Gracias.

Gracias.

