

AC 15 15

Matemáticas Especiales. El plano a fin. Guión número 19.

Autores Joaquín Abejer Montiagudo y otros. En la emisión de hoy, vamos a tratar de introducirles en el estudio del plano y de las ecuaciones de las rectas. Todos tenemos una idea de lo que es un plano, pues es un concepto cotidiano.

Pero he estado geando el tema en la unidad didáctica y no he logrado ver con claridad lo que se llama plano a fin. En efecto, todo el mundo sabe lo que es una superficie plana, una mesa, una pared, una pizarra, etc. Además sabemos que en una superficie plana podemos dibujar puntos, rectas y todo tipo de curvas mediante una tija o un lápiz.

Ahora bien, esta imagen intuitiva nos será útil en el futuro para representar las rectas y las curvas en el plano. Pero antes hay que conseguir definir lo que es un plano a fin, de forma que la definición sea lo más general posible y en términos matemáticos. Me gustaría que nos explicara esa definición, pues la verdad es que a mí también me parece difícil.

Pues vamos a ello. Lo primero es decir que el plano a fin es una estructura matemática. ¿Del tipo de las ya estudiadas? No totalmente.

En ellas teníamos un conjunto y una ley de composición interna, o un conjunto y dos leyes de composición interna. También en el espacio vectorial teníamos dos estructuras previas, un grupo abeliano y un cuerpo que ligábamos mediante una ley de composición externa. En el presente caso tendremos dos conjuntos ligados por una ley externa, pero uno de los dos conjuntos no tiene por qué estar estructurado.

Tendremos entonces dos conjuntos como en el espacio vectorial, pero a diferencia de él, donde los dos tienen estructura algebraica, aquí parece ser que uno de ellos es sólo un conjunto sin estructura dada previamente. Exacto. Veo que ha captado la idea.

Definamos, pues, los conjuntos sobre los que construiremos el plano a fin. Tendremos dos conjuntos, P y E . P será un conjunto de elementos que llamaremos puntos. Estos elementos que ha llamado puntos son los que dibujamos sobre cualquier superficie plana mediante un punto.

Esa representación gráfica para visualizar el concepto matemático puede efectivamente sernos útil por ahora. Bien, habíamos dicho que teníamos un conjunto P a cuyos elementos les llamábamos puntos. El otro conjunto, E , será un espacio vectorial de dimensión 2 sobre el cuerpo de los números reales.

Definamos a continuación una aplicación del producto cartesiano P por E en P . ¿No es esa la forma que teníamos para definir una ley de composición externa? Efectivamente, y me gustaría que me indicaran cuáles son los elementos del producto cartesiano P por E . Por ser un

producto cartesiano, sus elementos serán pares ordenados. En este caso, al ser el producto cartesiano de P por E , sus elementos serán pares, cuyo primer elemento será un elemento de P , o sea, un punto, y el segundo, un vector de E . Bueno, vamos a repetir esto un poco más lento. Dice usted que por ser un producto cartesiano, sus elementos serán pares ordenados.

Y en este caso, al ser el producto cartesiano de P por E , sus elementos serán pares, cuyo primer elemento será un elemento de P , o sea, un punto, y el segundo, un vector de E . ¿Es así? Sí, así es. Muy bien. Vamos a ver cómo es la aplicación que hemos definido.

Sea, por ejemplo, un punto Q del conjunto P y un vector V del conjunto E . Como sabemos, el par QV es un elemento del producto cartesiano P por E . Mediante la aplicación que denotaremos por ϕ , haremos corresponder a este par un determinado elemento R del conjunto de puntos P . Se puede decir esto de otra manera. El punto imagen R será igual a Q más V . O sea, que dado un punto Q del conjunto P , para obtener otro punto R del mismo conjunto, basta sumarle al primer punto un vector V . Bueno, tengan ustedes en cuenta que esta suma no es la suma habitual entre números, sino la ley de composición externa definida anteriormente. Profesor, ¿se podría ver esto con un ejemplo? Bien, vamos a intentar, aprovechando un ejemplo, dar una idea más concreta de esta aplicación.

Supongamos que el conjunto de puntos que consideramos es el de la pizarra. Marquemos con la tiza un punto que llamaremos Q . Desde este punto, trazamos una flecha en cualquier dirección que llamaremos vector de origen Q , sentido el que indica la flecha, y dirección la de la línea recta en la que está contenida la flecha. El extremo del vector, es decir, la punta de la flecha, nos marcará otro punto del plano que será el que hemos llamado R en la definición de la aplicación.

O sea, que mediante un punto del plano y un vector dado, se obtiene otro punto del plano. Exacto. Después de esta pequeña aclaración, vamos a ver las propiedades que tiene que cumplir esta aplicación para obtener la estructura de plano afín sobre el cuerpo de los números reales.

La primera de ellas nos dice que, dados dos puntos cualesquiera del conjunto P , existe un único vector tal que, sumado a uno de los puntos, nos da el otro. Tengo una duda respecto a esto. Veamos.

Si yo dibujo dos puntos, A y B , en la pizarra, usted dijo que es único el vector que une esos puntos. Pero yo veo que hay dos vectores que unen A y B . El vector que va desde A hasta B , y el que va desde B hasta A . Si se da cuenta, en lo que usted dice, no hace hincapié en cuál es el punto de partida y cuál es el punto de llegada. Si se fija en la definición, el orden en que tomamos los puntos es fundamental.

Es decir, dados dos puntos A y B , existe un único vector tal que, sumado al punto A , da el punto B . O sea, obtendremos un vector que empieza en A y termina en B . Igualmente, existe un único vector que, sumado al B , es decir, empezando en el punto B , nos dará el A . Es decir, terminará

en A. Y se puede demostrar que si el vector que va desde A hasta B es V , el vector que va desde B hasta A es su opuesto, menos V . ¿Y cuál es la segunda propiedad? Podemos decir que es una especie de propiedad asociativa entre puntos del conjunto P y vectores del conjunto E . Primeramente, debemos explicar que, en la definición que vamos a dar, emplearemos el mismo nombre, suma, para dos leyes distintas. Una es la ley de composición externa, es decir, la aplicación de P por E en P . Y la otra es la suma de vectores dentro del espacio vectorial. O sea que en la propiedad vamos a sumar puntos con vectores y vectores entre sí.

¿No es así? En efecto. Definamos entonces la propiedad. Dado un punto cualquiera A del conjunto P y dos vectores cualesquiera V y W del conjunto E , se obtiene el mismo resultado al operar de las dos formas siguientes.

Primera, cogemos el punto A y le sumamos el vector V . Al resultado, que será otro punto del conjunto P , le sumamos el vector W . Y de esta forma obtenemos otro punto. Segunda, hacemos lo siguiente. Sumamos primero los dos vectores del espacio vectorial, obteniendo así otro vector.

Este nuevo vector se lo sumamos al punto A y obtenemos el mismo punto que obteníamos con el primer método. Profesor, ¿estas propiedades se deducen de los dos conjuntos que tenemos y de la ley externa entre ellos? No, no, no. Estas propiedades son los axiomas que deben cumplir el conjunto P , el espacio vectorial E de dimensión 2 sobre el conjunto de los reales, y la ley externa suma definida entre ellos para poder afirmar que hemos definido una estructura de plano afín sobre el cuerpo de los números reales.

Bien. Creo que tenemos una idea de lo que quiere decir la definición de plano afín. Como hemos dicho otras veces, no creemos que la emisión radiofónica sea el medio apropiado para tratar las distintas proposiciones y definiciones sobre rectas, paralelismo y perpendicularidad, así como la ecuación de una recta.

Sin embargo, vamos a pasar a un tema que puede ser útil aclarar ahora. Este es el de sistema de referencia y coordenadas. ¿Les recuerda a ustedes algo esto de sistema de referencia y sistema de coordenadas? Bueno, esto puede tener algo que ver con las dos rectas perpendiculares que vemos en los libros y periódicos cuando dibujan una gráfica, ¿no? Sí, efectivamente.

Esa es la idea que yo pretendía hacerles recordar. Veamos exactamente lo que es un sistema de referencia en un plano afín. Llamaremos sistema de referencia del plano afín, definido sobre el cuerpo de los reales, a una terna de elementos formada por un punto O del conjunto P , al que habitualmente llamaremos origen, y a dos vectores linealmente independientes del espacio vectorial E , que al ser de dimensión 2 formarán una base.

Pero, ¿cómo sacamos unos ejes de estos dos vectores y del punto O ? Como sabemos, los vectores en el plano nos indican una dirección en el mismo, o sea, una recta del plano. Los dos vectores de la base, al ser linealmente independientes, definen direcciones distintas. Si tuvieran

la misma dirección, los vectores serían iguales, salvo un escalar, es decir, no serían linealmente independientes.

Entonces, tenemos dos rectas no paralelas definidas por las direcciones de los vectores, ¿no es así? Exacto, y todo par de rectas no paralelas de un plano se cortan en un punto del mismo. Ese punto es el que tomamos como origen O del sistema de referencia. A las rectas definidas por los vectores de la base, las llamamos ejes coordenados de dicho sistema de referencia.

¿El sistema de referencia es único, profesor? No, no, no. Dependerá de la base que tomemos y del origen O . Veamos ahora lo que son las coordenadas de un punto respecto a un sistema de referencia dado. Sea un sistema de referencia cualquiera de origen O y vectores de la base U y W . Tomemos otro punto Q cualquiera del plano.

Sabemos por el primer axioma que entre los puntos O y Q existe un único vector V tal que $O + V = Q$. Pues bien, ese vector V , al pertenecer al espacio vectorial E , lo podemos expresar como combinación lineal de los vectores de la base U y W . A los escalares de esta combinación lineal, que serán números reales, les llamaremos coordenadas del punto Q . Ahora entiendo claramente por qué las coordenadas de un punto dependen del origen y de los vectores que cogemos como base. Naturalmente, porque a bases distintas corresponden coordenadas distintas. Y con esto cerramos el tema del plano afín.

Esperamos que esta emisión les haya clarificado las ideas que tenían sobre dicho tema.