

Esta noche en nuestro programa de matemáticas básicas nos acompaña, como es habitual, el profesor Eduardo Ramos. Buenas noches y bienvenido. Buenas noches Isabel, buenas noches a todos los alumnos del curso de acceso. Como hemos anunciado, vamos a hablar de los temas 10 y 11 del cálculo de probabilidades y estadística. A mí me gustaría, para empezar en este tema 10, saber a qué se denominan los fenómenos que se atribuyen al azar. Si hoy nos toca comentar un par de lecciones que, aunque son todas interesantes en este curso, creo que pueden representar un interés mayor para muchos de los alumnos de matemáticas básicas. Alguna especial llamada de atención que se pongan especialmente atentos y especialmente interesados en estos temas, los alumnos que vayan a hacer, por ejemplo, políticas y sociología, los alumnos que vayan a hacer educación psicológica,

En todas esas carreras se encontrarán con lecciones de estadística, con asignaturas de estadística, con materias de estadística con mucha amplitud, porque es de las herramientas más poderosas que tienen hoy las ciencias experimentales para llegar a conclusiones. Por eso estas dos lecciones que estudiarán hoy durante estos días para enfrentarse con el curso de acceso creo que van a ser los primeros pilares en el que apoyar todas esas enseñanzas que sin duda en las carreras, en los cursos que vienen tendrán. Mi pregunta es por lo que estudia en la lección de cálculo de probabilidades y me invitas a que comente eso de los fenómenos que se deben al azar y los fenómenos que no se deben al azar, los fenómenos aleatorios y los fenómenos deterministas. Quizás sea la primera ocasión en la que muchos de nuestros alumnos reflexionen sobre que en el mundo hay dos tipos de situaciones, dos tipos de consideraciones. Una de las situaciones son...

como estas que están en los ejemplos esos del primer punto del libro, que dicen afirmaciones como estas, que sabemos que pasan, dicen, por ejemplo, si un líquido se calienta suficientemente, se evapora. Ahí hay una consideración empírica, se observa que siempre ocurre de la misma manera, es una necesidad que obedece a la experiencia, vemos que es así porque siempre pasa así. Y esta es una ley física similar y con mucha más claridad, si queremos, vemos que una piedra no la soporta nada y se suelta, se cae. Es otra de las leyes físicas de la atracción de la gravedad. Vemos también, por otra parte, que hay otro tipo de situaciones en las que las cosas no ocurren con ese determinismo, con esa seguridad, con la que ocurren estos fenómenos que acabo de comentar. Por ejemplo, si uno sale de su casa todos los días y va al trabajo, pues unos días tardan. Un día tarda 10 minutos, otro día tarda 11 minutos, otro día tarda 9.

días tarda 15, dependiendo de las condiciones del tráfico, dependiendo de si llueve, dependiendo de una multitud de imponderables que uno no puede controlar y que hace que sea imposible predecir con total exactitud, de la misma manera que hemos afirmado en los ejemplos anteriores, cuánto se va a tardar. En este tipo de situaciones en las cuales las influencias de multitud de fenómenos y de imponderables, como digo, afectan al resultado final, decimos que están gobernados, son atribuidos a una cosa así un poco insustancial, decimos que los gobierna el azar, son fenómenos aleatorios. Claro, sobre los fenómenos físicos o de esas leyes deterministas, esos fenómenos deterministas que comentábamos antes, pues han ocupado las ciencias experimentales, la física, la química, que sabe que se evapora el líquido cuando lo calentamos. Y sobre el comportamiento de esos fenómenos que están gobernados por esa mano misteriosa. Gracias.

el cálculo de probabilidades y su parte aplicada a la estadística. Insisto, aunque deben reflexionar los alumnos, que esto es realmente, en mi opinión, interesante, ver que situaciones en las que uno pudiera en principio descartar, ya que no puedo saber nada sobre este hecho de cuánto voy a tardar en el viaje cotidiano, pues no puedo estudiar ese fenómeno. No, lo interesante es que la ciencia, en particular el cálculo de probabilidades, se esmera por extraer de estas situaciones toda la información posible que se puede conseguir. Por ejemplo, para darnos una idea de lo que quiero decir, el que no sepamos si vamos a tardar exactamente 10 minutos, no excluye que podamos tener otro tipo de información como lo más seguro es que tardemos entre 7 y 12 minutos. Esta es una información que podemos tratar de encontrar y ver qué afirmación, qué grado de fiabilidad tiene esta afirmación, cómo podemos medir esa fiabilidad, todo esto se lo...

el objeto científico de esta lección por eso recomiendo que se lea con mucho detenimiento esos capítulos esos puntos 10, 1 y 2 que explican con más ejemplos que ahora puedo hacer yo esta situación de hecho profesor Ramos a todos nos gustaría dominar esta materia y así pues no sé poder ganar una primitiva o

cosas de este tipo sí, no sé si podemos comparar porque las situaciones individuales con lo que el objeto de la estadística y el cálculo de probabilidades que son situaciones en las que se estudian experiencias repetidas de un determinado fenómeno aleatorio que es a donde vamos a caminar, poco probablemente se pueda decir del resultado individual las afirmaciones que se pueden hacer seguramente son relativamente débiles pero sí podemos llegar a intentar encontrar afirmaciones con una gran fortaleza y con una gran seguridad de lo que ocurre en experiencias repetidas de un determinado fenómeno eso hablando de la primitiva al individuo a lo mejor en particular sería un golpe de suerte un golpe de azar

Para el que no es un golpe de azar y es una cosa que ya tiene un grado de seguridad, es para el que organiza las primitivas o para los casinos que organizan, porque ese observador o ese experimentador sí hace repetidas veces el fenómeno aleatorio y sabe cuál es su comportamiento en largas series. Muy bien, ¿cuál es el concepto de probabilidad entonces? Siguiendo con esta línea de observar los fenómenos aleatorios, por ejemplo, vamos a poner ahora el ejemplo más clásico, que es el de tirar una moneda al aire y ver si sale cara, si sale cruz, y descartando esas hipótesis de que se cae de canto, etc. Entonces, si la moneda es honesta, está equilibrada, tiene una cara y una cruz, podemos observar que si hacemos lanzamientos repetidos de esa moneda, aproximadamente la mitad de ellos dará una cara y aproximadamente la otra mitad dará una cruz. El grado de aproximación de ello, pues claro, por ejemplo, si tiramos mil veces, podemos decir alrededor de 500 veces, si tiramos un millón de veces,

alrededor de 500.000 veces saldrá cara, ese alrededor tiene una imprecisión, una palabra imprecisa, no es lo mismo decir que cae entre, por ejemplo, 490 y 510 veces, etc. Bueno, pero si observamos que el número de caras que salen dividido por el número total de lanzamientos que se hacen, es decir, lo que podemos llamar ya frecuencia relativa del hecho de que haya salido cara, se llega a estabilizar en un número. Se llega a estabilizar en un número que es, en este caso, si hay dos posibilidades, si se dan las dos, si no hay sesgo ni tendencias a favor de una de ellas, pues ese número en el que se estabiliza la frecuencia, relativas de caras o de cruces, es un medio. Bueno, eso es una ley experimental, eso es una ley que tiene una observación práctica, lo hacemos, lo hacemos y, efectivamente, ocurre así. Entonces, eso nos lleva a considerar la noción de...

probabilidad, la idea de probabilidad, como un número real comprendido entre 0 y 1, hacia el cual idealmente tienden a estabilizarse las frecuencias de las observaciones que hacemos de un determinado experimento aleatorio. Y así, bueno, llegamos a definir así probabilidad. Pero antes vamos a necesitar un soporte en donde... Que sería el modelo matemático. Efectivamente, en donde montar eso. Y entonces ahí construimos lo que llamamos el espacio de posibilidades, clásicamente denotado con la letra griega omega, que está formado por el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio. En el caso que estamos analizando, poniendo de ejemplo paradigmático, es cara y cruz. Y en el caso, otro caso también muy típico, que es el del dado, que tiene seis caras, pues los resultados posibles son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, 2, 3, etc. Bueno, pues ese conjunto de resultados posibles...

experimento aleatorio se denomina espacio de posibilidades. Sobre ese conjunto se construyen una serie de conjuntos que podemos considerar simplemente en esta lección, así lo hacemos, los subconjuntos de ese espacio de posibilidades, de ese omega, y eso le llamamos sucesos. Y sobre esos sucesos podemos construir unas operaciones que son exactamente iguales, aunque desde el punto de vista conceptual reciben, o sea, pueden considerarse diferentes conceptualmente, pero desde el punto de vista operativo es lo mismo, como las operaciones de conjuntos, la unión, la intersección, etcétera. Aquí no hay que hacer un gran esfuerzo para entender esto, habiendo estudiado la lección de conjuntos e incluso la lección de lógica, todo lo que sea hablar de unión de sucesos, de intersección de sucesos, etcétera, ya lo tenemos aprendido. Aunque en principio son nuevas operaciones definidas en el conjunto de sus posibles subconjuntos. Subconjuntos.

del conjunto omega de espacio de posibilidades. ¿Y qué diferencia hay entonces entre el modelo matemático de los sucesos aleatorios, que es de lo que estamos hablando, y el modelo matemático de la probabilidad? Ese soporte del espacio de posibilidades de los sucesos, que es lo que intentamos ver su grado de ocurrencia, la verosimilitud con la que van a pasar, en fin, tener una información sobre lo que va a pasar ahí, se mide con la probabilidad, que no es más, como estamos diciendo, que va a ser una función definida sobre los sucesos y con valores en el intervalo $0,1$. O sea, quiere decir eso, que los valores que toman la probabilidad son números que son siempre mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 1, y son números reales. Recordemos la lección 4 de los números reales. Claro que no cualquier función definida así sobre los sucesos y con valores en $0,1$ es una probabilidad, sino que le exigimos un par de condiciones que están ahí explicadas en la pregunta correspondiente, en el punto 10,4, que son esencialmente que la probabilidad de la unión de sucesos...

que sean incompatibles, que sean disjuntos, que no puedan darse simultáneamente, pues es la suma de las probabilidades y que la probabilidad de lo que ocurre siempre del espacio de posibilidades, también llamado suceso seguro, es 1. Eso va a pasar. Entonces, con esas dos condiciones, una función que verifique esas dos condiciones y toma valores en 0 y 1 definidas sobre el conjunto de los sucesos se llama probabilidad. En este contexto que estamos nosotros manejando. La definición que se usa en las matemáticas más avanzadas de probabilidades es un poquito más compleja, pero esencialmente responde a la misma idea. ¿La probabilidad tiene propiedades? Sí. Bien, con entendido ese concepto, y esto es una de las, digamos, ventajas de las matemáticas, una vez definido el concepto y ha sido matizado, definido mediante propiedades, podemos manejar esas propiedades en el dominio de las ideas con las leyes de la lógica, con las leyes del razonamiento astrato y construir una serie de propiedades o demostraciones. Y es importante mostrar una serie de propiedades que son simplemente fruto de la sioma.

O sea, si yo me disfruto de las condiciones que le hemos puesto a la tal función de probabilidad, que por supuesto esas propiedades que demostramos, que están ahí en la pregunta 15, que hay que conocerlas y manejarlas, tienen una explicación en el mundo de los sucesos, de los experimentos aleatorios, o sea, tienen un significado y se entiende lo que significa. Pero bueno, ese es precisamente el hacer de la matemática, es el intentar formalizar, construir de forma simática un concepto, como en este caso es la probabilidad, y a partir de él, deducir cosas, propiedades, mediante método de razonamiento lógico, que se compadecen bien con la realidad, con lo que ocurre en la realidad. Pues bien, hemos hablado en este tema 10 del cálculo de probabilidades. Hay otros epígrafes dentro del tema, pero que no van a ser materia de examen, como siempre, pues recomendar que los lean, ¿no? Sí. Sí. Sí. Esta lección que es un poquito larga, pues, en fin, se habla de probabilidad condicionada, de los...

dependencias de sucesos, de la fórmula de Bayes, etc. No son conceptos y preguntas muy difíciles de entender, pero bueno, para aligerar un poco el esfuerzo de memoria que siempre hay que hacer en los exámenes, pues lo eliminamos de las pruebas presenciales. Lo que sí hay que saber es esa pregunta 16 de cómo se asignan probabilidades, concretamente la llamada regla de Laplace, que es un criterio, un modo de asignar probabilidades a los sucesos mediante esa idea intuitiva bastante coherente y bastante simple de entender, que es que la probabilidad de un suceso es el número de casos favorables al suceso dividido por el número de casos posibles. Con esa regla tan sencilla uno es capaz de resolver problemas de calculo de probabilidades no muy complicados y que en situaciones como las que, por ejemplo, se ponen en los ejercicios, se puede uno desenvolver bien. Simplemente sabiendo esta regla simple de Laplace. Pero sí hay que entenderla bien y saber...

Entonces, todo el secreto de resolver los problemas de cálculo de probabilidades consiste en tener bien construido, entender bien cuál es el espacio de posibilidades y el tener, cuando le dan a uno un suceso, le dicen, este es el suceso, que suelen a uno dársele en forma de palabras, con una expresión de ley idiomática, pues hay que traducir a ver qué sucesos elementales lo forman para saber cómo se forma el cociente casos favorables partido por casos posibles. Entonces, un poquito de práctica ayuda y de ver situaciones, la combinatoria de la lección anterior ayuda mucho, etc. Entonces, familiarizarse un poquito con este tipo de operativas. Pues bien, debemos pasar ya al siguiente tema, el tema 11, y desde luego, pues como comentaba al principio, entre todas las ciencias matemáticas, pues quizás sea esta la estadística, la que está más en el ambiente que respiramos, la más conocida para la persona de la calle. Sí, la estadística es quizás la parte de las matemáticas. La estadística es ahora más universalmente admitida como método en la ciencia.

experimentales. Tiene muchas ventajas, evidentemente. Es un lenguaje común, un lenguaje universal, un lenguaje para manejar grandes masas de números que se ha estandarizado, que todo el mundo entiende y por eso le da una cierta objetividad que permite que los investigadores se entiendan con claridad cuando están expresando sus conclusiones, sus teorías, sus hipótesis y sus tesis. Etimológicamente, estadística significa ciencia del Estado. Los Estados preocupados por el control de sus súbditos, el control de las economías, de las riquezas, etc., se dedicaron a recopilar en forma numérica la descripción de sus posesiones, de cuántos súbditos había, qué capitales había, qué producciones agrícolas, etc., ganaderas había, etc. Y esas recopilaciones, tabuladas, escritas, en forma de tablas, que llenaban páginas y páginas de tablas.

constituían el estado del estado por decirlo así no el estado numérico del estado los estados numéricos del estado y eso se llamó acabó llamándose estadísticas por ejemplo los ramos hay dos conceptos que bueno que ahora suenan muchísimo los medios de comunicación y constantemente cuando nos hablan de

estadística se suenan que es la población y la muestra eso es estadística como estoy diciendo la estadística podría decirse que se dedica a la descripción numérica de grandes conjuntos de individuos descripción numérica y se miden normalmente los resultados de la observación de esos individuos es son números son tablas son resultados que son objetivos en forma de un número real un número entero lo que sea un número fraccionario el conjunto sobre el que se hace todo el estudio se llama población y lo ideal para es normalmente es estudiar la población

Y hacer lo que se llama un censo. Por ejemplo, en los estados se hacen censos cada X años para tener un control de lo que está pasando. Claro que en muchas situaciones no es posible hacer un censo por razones económicas, por razones operativas. Por ejemplo, si se quiere saber la resistencia de un vehículo ante un choque, no se puede hacer un censo de estudiar todo lo que se estropean los vehículos porque acabaríamos con todos ellos. O lo que duraría una lámpara, la vida útil de una lámpara, pues esos son ejemplos típicos que la observación destruye la unidad y entonces no se puede hacer un censo. Entonces hay que recurrir a estudiar un subconjunto de la población que suele determinar si se muestra. Y hay toda una teoría muy importante que permite extraer resultados de los estudios de las muestras para las poblaciones. La teoría de muestras, etc. Y la inferencia estadística. Pero bueno, este curso lógicamente no podemos entrar en ello porque ya son métodos más... Más avanzados de estadística. Y cuando hablamos de variables estadísticas...

Sí, eso es quizás el pilar de la estadística. La variable estadística no es más que algo que se está estudiando de las poblaciones, pero traducido a forma numérica, como puede ser el peso, la talla, el número de hijos, los ingresos mensuales, etc. Ese tipo de características de la población que son objeto de estudio suelen traducirse en variables que pueden dividirse de una manera genérica en variables cualitativas cuando sus posibles valores son modalidades. Como por ejemplo la característica es el color rojo, azul, verde, etc. O el pelo rubio, el pelo negro, el pelo castaño. Y las variables cuantitativas cuya traducción es un número, pues eso que decía antes, el peso, el número de hijos, etc. Y bueno, el objeto de toda esta lección va a ser el estudio de esas poblaciones numéricas, quizás estudiadas a través de muestras, descritas en forma de variables.

Lo que hacemos es hacer una síntesis de esa cantidad de números. Para eso están los gráficos, las representaciones gráficas. Luego hacemos una síntesis en forma de números, de datos concretos. Y están, por ejemplo, la media aritmética y la varianza y la desviación típica. Todas estas ideas no son muy complicadas. Hay que conocerlas bien. Otro concepto de tipo estadístico que se maneja es el coeficiente de variación, etc. ¿Podríamos entrar en alguno de estos puntos que quizá merezca la pena? No tenemos muchos minutos, pero todavía tenemos alguno. Por ejemplo, ¿qué es una frecuencia? Ya salió antes la frecuencia absoluta, ese número de veces que se ha dado un determinado valor de la variable. La frecuencia relativa, ese número de veces que se ha dado ese valor dividido por el número total de veces. Es la primera idea que se le ocurra a cualquiera para tratar de resumir una tabla de valores que se han obtenido. Y se han obtenido al observar las características buscadas en una determinada forma.

población pues la idea es contar cuántas veces ha salido cada valor y agruparlos en forma de tabla después la segunda idea como decía antes que sólo ocurre uno es hacer una representación gráfica de esa situación por aquello y con una imagen vale más de mil palabras y entonces hay los diagramas del sector el orden a mar de barras los histogramas etcétera que pues hoy son muy populares están en todos los periódicos y en todos los medios de comunicación y luego la siguiente paso un paso más como decía antes es hacer un número que resuma toda la tabla o dos números o varios números y ahí están las medidas de posición o medidas de centralización o medidas de tendencia como son las más típicas la media aritmética que estudiamos sí que es una medida reconocida sabe todo el mundo cómo resumir las calificaciones del curso que aún ha obtenido sabe todo el mundo cómo resumirlas en una calificación que haga una síntesis del trabajo del alumno a lo largo del curso se suma las calificaciones y se vive por un número de ellas dice está en mi nota media bueno pues esa idea es

la media aritmética. También la idea de varianza mide cómo las observaciones individuales van arriba y abajo por encima de la media. Por ejemplo, unas calificaciones como 10-10-0-0 dan una información diferente a calificaciones como 5-5-5-5. Al segundo alumno le llamaríamos un alumno más equilibrado que al primer alumno. Esa medida de la dispersión alrededor de la media, aunque ambos tienen la misma media, tienen media 5, 20-4-5, esa medida de cómo el alumno está más o menos equilibrado viene en términos de un parámetro que se llama la varianza o la desviación típica. Entonces todo ese tipo de características y de estadísticos hay que saberlo, no son difíciles evidentemente, hay que saberlos calcular bien, interpretar, etc. Esto va a ser una... casi siempre es una de las preguntas de los exámenes.

calcular medias, varianzas, cosas así. Y ya por último, ¿a qué llamamos asociación estadística de variables? Sí, un poco en una idea ambiciosa de intentar introducir al alumno de este curso en que la estadística va más allá de hacer representaciones unidimensionales de un sujeto o de una determinada población. Va más allá en el sentido de que es capaz de estudiar un individuo desde diversos puntos de vista. Por ejemplo, la más característica, podemos estudiar un individuo, un ser de una población desde el punto de vista de su altura y de su peso. Y tenemos una descripción más completa del individuo en altura y peso, con dos variables en lugar de una sola de ellas. Bueno, pues claro, da la impresión de que la altura y el peso de un individuo están relativamente relacionados. Es decir, si un tío, una persona es alta, pues pesará mucho. Y si una persona es baja, pesará menos. Y nos da una idea así de que...

Son variables que varían en una determinada dirección, en sentido. Hay otras cosas, en cambio, que tenemos la sensación de que no tienen nada que ver con las otras. Por ejemplo, si le medimos a una persona el número del pie que calza y el número de hermanos que tiene, diríamos que nos digan que calza un 42, no nos informa gran cosa sobre el número de hermanos que tiene. Entonces, bueno, y luego hay otro tipo de relaciones en el mundo, como son que a determinada velocidad, para un determinado tiempo, nos recorremos un determinado espacio. Entonces, he puesto tres ejemplos de situaciones en que las variables varían de manera diferente. En el primer ejemplo, peso y altura, tenemos una variación conjunta, pero no está perfectamente clara. En el segundo ejemplo, tenemos una auténtica independencia entre las dos variables. En el tercer ejemplo, tenemos una dependencia funcional, es decir, a determinado tiempo, sabemos determinado espacio, dada la velocidad. Entonces, entre esas dos fronteras, la dependencia funcional y la independencia absoluta, está la dependencia funcional. Y en el tercer ejemplo, tenemos una dependencia estadística, que es lo que trata de...

medir la asociación estadística, los estadísticos como son la covarianza y todavía hay un paso más que la ambición de la estadística. ¿Cómo predecir, por ejemplo, el peso de una persona sabiendo su altura? ¿Cuál sería la mejor manera de decir cuál sería el peso? ¿Cómo podemos estimar o dar una aproximación del peso de una determinada persona si no se informan de su altura? Pues esa idea intenta solucionar la regresión y de ahí estudiamos en esta lección la regresión lineal, las retas de regresión de una variable sobre otra, los coeficientes que aparecen por ahí como son los coeficientes de correlación y determinación, etc. Esto es un mundo, en mi opinión, de gran interés, especialmente, insisto, como decía al principio de este programa, para los alumnos de las ciencias experimentales como son la pedagogía, la psicología, las ciencias políticas y sociología, etc. Pues debemos despedirnos porque nuestro tiempo ha acabado, no sin anunciar...

que el próximo 13 de mayo hablaremos del examen final de la asignatura, hablaremos también del tema 12, por supuesto, matemática del computador, pero daremos ya las orientaciones para el examen final. Repito, el próximo 13 de mayo. Estén atentos. Y muchísimas gracias. Bien, venga, un último esfuerzo, que ya queda poco para el día del examen final. Y hasta el próximo programa, un saludo muy cordial para todos nuestros alumnos. Gracias.