

AC 10 87

Saludos, muy buenas noches, de nuevo un día más, el curso de acceso directo permanecerá a lo largo de 30 minutos con vosotros. Hoy matemáticas básicas, con el profesor Víctor Hernández Morales trataremos los capítulos cuarto y quinto del libro de texto, que nos hablan de los números reales y de la geometría analítica. Entramos ya en materia directamente, en el capítulo cuarto nos encontramos con los números reales, ¿qué son los números reales? Pues los números reales son el resultado de los números que proceden de nuestra experiencia más inmediata, que realmente ya los estudiamos en los capítulos anteriores, naturales y racionales, y unos números que causaron y que siguen causando cierta desazón, que proceden de un convencimiento más abstracto, que no se reflejan en una experiencia tan inmediata, pero que igualmente están próximos a nosotros.

Me explico, es una cosa ya bien muy sabida desde hace muchos años, desde la época de Pitágoras, estamos hablando pues del siglo V antes de Jesucristo, que no todos los números, no todas, dicho en unos términos quizá más próximos, no todas las longitudes se pueden medir por aquel procedimiento que hablamos de subdividir y subdividir y subdividir, y terminar en un momento dado, dar con la longitud concreta. En resumidas cuentas, hay números que, por más que nosotros dividiésemos la unidad en 10 partes, y la décima parte de la unidad en otras 10, y así sucesivamente, y fuésemos procurando con esa reglilla cada vez más pequeña, comparar la longitud que tenemos o la longitud sobrante con nuestra reglilla, nunca en un número finito de etapas seríamos capaces de dar con la medida exacta de la longitud. Esos números, por otra parte, no son extraordinariamente complicados.

El ejemplo más elemental de ellos, pues es el número que elevado al cuadrado da 2, el número que muchos de nosotros estamos acostumbrados a manejar alguna vez en su simbolismo actual que llamamos raíz de 2. Ese es un número que tiene un desarrollo decimal que no termina nunca, que no es finito, que no es limitado. Si quisiéramos escribir raíz de 2 con precisión exacta, necesitaríamos un número infinito de cifras decimales. ¿Por qué se incorporan aquí estos números, a toda la colección de números anteriores? Pues sobre todo por un afán, diríamos, de pulcritud intelectual.

En la práctica es claro que nadie maneja números con un desarrollo decimal infinito, eso no es posible, pero sin embargo no está mal tener un orden en la cabeza y saber que los conceptos están encajados de cierta manera y que cuando hacemos cálculos con fracciones, con números racionales, estamos calculando de una manera exacta. Mientras que cuando hacemos cálculos, por ejemplo con nuestra máquina de calcular, y le pedimos que nos dé el número raíz de 7, debemos saber que lo que aparece en la pantalla no es exactamente lo que corresponde con ese concepto, sino una aproximación que para la mayor parte de nuestros intereses nos resulta suficiente. En resumen, en esta lección, bajo este título de números reales, se pretende dar ya una idea general de los números anteriores dentro de un concepto más amplio.

Los números naturales son los números fraccionarios, junto con esta clase, digamos, un poco

molesta de nuevos números, que llamamos irracionales, y que necesitan un desarrollo decimal infinito y no periódico. ¿Se podría decir entonces, según lo entiendo yo, que estos números reales vienen a llenar un hueco que no pueden llenar los otros números? Sí, los irracionales, desde un concepto geométrico, se pueden entender como los números que llenan los huecos que habría en la recta de los números racionales. Es decir, que si nosotros imaginamos una recta de aquel alambre de longitud ilimitada, y en él fuésemos marcando los puntos, las longitudes correspondientes a todas las fracciones, esas marcas no cubrirían toda la longitud material del alambre.

Al revés, habría muchísimos, muchísimos, créenme que muchísimos agujeros. Y en esos sitios no marcados es donde estarían, corresponderían a unas longitudes que no son fraccionarias, que no tienen, en su expresión simbólica, un desarrollo decimal finito o periódico, y corresponden, en resumidas cuentas, a esta nueva invención de los números irracionales. Pasando a otro apartado de este capítulo, ¿qué podríamos decir del cálculo de potencias? El cálculo de potencias tiene la siguiente misión.

Si nosotros podríamos abandonar directamente, después de escuchar lo anterior, la imposibilidad de escribir el desarrollo completo, el decimal exacto de un número irracional, pues podríamos abandonarnos y decir, bueno, pues vamos a dejar los irracionales, vamos a coger hasta la séptima cifra decimal, por ejemplo, y nos olvidamos de las restantes. Ese es un comportamiento que si tenemos que hacer unas cuantas, sólo unas cuantas operaciones con números irracionales nos puede dar un resultado aceptable. Pero, en principio, si hay que operar sistemáticamente con números y los números se manejan de forma aproximada, los errores en la aproximación se van acumulando.

Más adelante, en el capítulo 12, pues trataremos de dar una idea más precisa de esto, de lo que estoy hablando ahora. De manera que es más inteligente lo siguiente. Inventar un simbolismo que, digamos, represente exactamente al concepto del que hablamos, el número irracional, la magnitud que precisa de un número irracional para ser expresada.

Operemos con los simbolismos y cuando ya tengamos el resultado final exacto, en el sentido de que el símbolo final expresa perfectamente la magnitud de la que estamos hablando, entonces hagamos la aproximación. De esta manera evitaremos esa acumulación de errores que podría conducir, pues, a una mala aproximación final del número que andamos buscando. ¿Y cuál es este simbolismo? Pues es el simbolismo de las potencias y de los exponentes y de los radicales.

Lo que se pretende un poco con esta lección, pues, es acostumbrarse simplemente a ese manejo de operar con algo que no tiene una traducción inmediata en operaciones en el sentido de las que anteriormente hemos visto. No se traduce inmediatamente en números. Los números aparecen camuflados bajo una representación simbólica nueva.

Por ejemplo, si yo quiero multiplicar raíz de 2 por raíz de 3, para ilustrar lo que decía anteriormente, pues, puedo optar por dos caminos. Uno de ellos es aproximar raíz de 2, como

viene en la calculadora, y luego aproximar raíz de 3, como viene en la calculadora, por un número racional, y multiplicar estos dos. El resultado es una aproximación racional de lo que sería el resultado exacto de la multiplicación raíz de 2 por raíz de 3. La otra posibilidad, que creo es más conveniente, insisto, si los cálculos deben hacerse de manera repetida, es simbólicamente multiplicar raíz de 2 por raíz de 3. Las reglas de operación me dicen que eso es igual a un número que llamo raíz de 6, y ahora es cuando uso la calculadora para hacer la aproximación.

En general, el resultado de esta manera es preferible al anterior. Y vamos a pasar a las ecuaciones. Ya hemos hablado en el capítulo tercero de las ecuaciones, pero ahora se nos plantean las ecuaciones de segundo grado.

¿Qué podemos decir de las ecuaciones de segundo grado? Sí, el motivo de este retraso es justamente porque la fórmula general de solución de una ecuación de segundo grado pasa por el manejo de este simbolismo de los radicales de los que se trata previamente en esta lección. De nuevo, pues un poquito la comparación es en el capítulo de números racionales, o con números racionales yo puedo resolver grandes clases de ecuaciones, fundamentalmente ecuaciones lineales cuyos coeficientes son números racionales o números naturales, o números enteros. En el momento en que la incógnita esté elevada a grado 2, la ecuación no sea lineal, entonces normalmente la solución del problema será un número que se sale del campo de los números racionales, que cae dentro de este mundo de los números irracionales.

De ahí el incluirla en el lugar natural de estudio de estas ecuaciones. He entendido un poquito el concepto de número irracional y la verdad que por otra parte creo que para el estudiante pueden ser gustosas las ecuaciones de segundo grado, en el sentido de que hay una norma muy taxativa de cómo deben resolverse. Es simplemente aprender la solución de la ecuación, tal, tal, y en fin, esto muchas veces resulta gustoso en el sentido de que uno está muy seguro de lo que está haciendo, y en fin, no creo Isabel que les presente demasiada dificultad.

Hay otra serie de epígrafes en este capítulo, los que habla, por ejemplo, de capitalización, de amortización, ¿todo esto va a entrar dentro del programa? No, como está indicado en la guía, las dos secciones, los dos epígrafes que tratan de exponenciales y logaritmos y problemas de capitalización no están incluidos en el programa. En ese sentido, digamos, un poco, digamos, racano de estudiar lo mínimo, pues no hay que estudiarlos. Incluirlos aquí, pues creo que no está mal, es decir, es un poco hacer gala del nombre del libro, Matemáticas Básicas.

Quizá uno del primer empleo básico que hagamos de la matemática, pues sea cuando casi inevitablemente tengamos que ir a un banco y a otro a ver quién nos ofrece las mejores condiciones para podernos comprar un piso. Y entonces, pues a lo mejor viene muy bien dar un repasito a los consejos, por otra parte muchos de ellos prácticos que se dan en esos epígrafes. Es decir, que aunque no entre en el examen final o no entre en el programa, bueno, aunque sea para andar por casa, nos podemos decir es muy necesario también.

Hombre, de momento, de momento, si digamos el objetivo primero, pues es aprobar el curso,

pues bien, pues no hay por qué tenerlos en cuenta. Pero ya digo, seguramente a muchos les vendrá bien algún día, porque está tratado de manera que no solamente, digamos, se ha dado lo que es la teoría que inspira las amortizaciones bancarias y las capitalizaciones bancarias, sino que también se da buena cuenta de la jeringonza habitual, en la cual, pues la tasa anual equivalente no coincide con lo que el banco nos dice y muchas cosas. Todo eso hemos procurado ahí, pues hacer una explicación creemos que bastante asequible.

Y ya digo, seguramente a muchos algún día les vendrá bien y a lo mejor hasta les ahorra dinero el leer un poquito el capítulo. Bien, y ya para acabar con este capítulo cuarto, podríamos recapitular, ¿hay algo que añadir o que matizar? No, yo creo que desde el punto de vista del estudio, creo que es bien simple y bien claro. Primero, procurar depurar un poquito ese concepto de número irracional, entender por qué, digamos, hay una exigencia intelectual y también práctica de incrementar los números, de inventar nuevos números, y pasar así a considerar los números fraccionarios junto con los irracionales.

A todos ellos los nombramos números reales. Y luego, pues, está el aspecto mecánico de resolución de las ecuaciones de segundo grado, que ya digo, normalmente no es algo que a nuestros estudiantes por experiencia sabemos que no les cuesta excesivo esfuerzo. En ese sentido, pues, realmente es un capítulo muy breve.

Comenzamos con el capítulo quinto, que trata de la geometría analítica. Bien, la geometría es una de las actividades matemáticas más antiguas, y fue en el siglo XVII, y gracias a Descartes, cuando la geometría entró en conexión con otras disciplinas matemáticas. Víctor, ¿qué es el sistema de referencia cartesiano? Pues es una revolución.

Creo que es la mejor manera, y un poco publicista, si quieres, de expresarlo. Es decir, la geometría durante muchos siglos fue una actividad encerrada en sí misma, en el sentido de que el razonamiento geométrico giraba exclusivamente acerca de propiedades de las reconocidas en las mismas figuras geométricas, sin conexión con otras partes de la matemática. La idea revolucionaria de Descartes, que como suele ocurrir con las grandes ideas, hoy en día nos resulta tan familiar que casi parece banal, es asociar los números a la geometría.

Esto es lo que los profesionales llamamos hacer algebraica la geometría. Otra vez vuelvo a hablar de traducción. Significa traducir las propiedades de las figuras, incluso el concepto mismo de figuras, a condiciones algebraicas, a condiciones expresadas en términos de números e incógnitas, a ecuaciones.

Y de esta manera entra en la geometría la posibilidad de resolver los problemas suyos, los problemas geométricos, mediante técnicas, mediante métodos que vienen de fuera, que vienen del álgebra. Por ejemplo, los métodos que se estudiaron en el capítulo 3 sobre la resolución de ecuaciones. Y la idea es muy simple.

Un punto para un griego y para los hombres durante muchos siglos, un punto era algo,

diríamos, que tiene su esencia, que tiene su vida y su existencia y su concepto. Estrictamente hablando sería su concepto. Sin embargo, a Descartes se le ocurre cambiarle ese concepto.

Mejor dicho, no cambiar el concepto, sino cambiar esa otra vez, esa representación del punto en nuestro cerebro por algo que tiene un carácter más numérico. Y al buen hombre, pues sencillamente lo que se le ocurre es decir, bueno, si yo introduzco unos ejes de medida, por ejemplo, pues en el espacio o en el plano, pensemos en un punto situado encima de una mesa y yo quiero describir dónde está ese punto, pues una posibilidad que tengo es, otra vez, arbitrariamente, como hicimos cuando decidimos cuál era la unidad de longitud, introducir lo que ya es relativamente familiar, lo que llamamos unos ejes, unos ejes sobre los cuales puedo medir longitudes. Entonces puedo conocer la posición del punto sin más que medir cuál es la distancia de la proyección del punto respecto de un eje a otro dado, el origen, y cuál es la distancia de la proyección desde el punto respecto del segundo eje al origen.

En resumidas cuentas, lo que también estamos acostumbrados a hablar, o incluso familiarmente, dar las coordenadas del punto. Esta idea, pues, no es nada extraña, pues todos hemos oído en las películas, incluso en las películas de ciencia ficción, pues como las naves espaciales, pues tienen que ir a un punto que está en una latitud y en una longitud. Esas son las coordenadas de un lugar en el espacio respecto de un sistema de referencia, en ese caso esférico.

En otro caso, para puntos situados sobre un plano, la idea es bien simple, dos números que representan longitudes pasan a nombrar a un punto, a un punto geométrico, al antiguo concepto de geométrico, y evidentemente ese nombre es sólo para él, no puede haber otro punto cuyas coordenadas sean iguales y al revés, dadas unas coordenadas sólo puede haber un punto en el plano que tenga esas coordenadas. De manera que esta asignación es unívoca y por consiguiente se convierte en una nueva posibilidad de simbolizar algo por, en este caso, dos números. Como vemos de nuevo, muchas de las de lo que hoy nos parece o se juzga que son grandes progresos de la matemática son simplemente cambios de nombre.

En este sentido es un cambio de nombre de algo que antes se nombraba como un ente en sí mismo, pues ahora pasa a ser considerado por su representación en términos de dos números. Ahora, esta posibilidad de nombrar a los puntos por un par de números, un par de coordenadas, no sería especialmente relevante si no pudiéramos, como podemos a continuación, traducir las nociones geométricas, por ejemplo la noción de recta o la noción de círculo, a condiciones expresadas en términos de sus coordenadas, de las coordenadas de los puntos que están en la recta o que están en el círculo. En resumidas cuentas, la peculiaridad de la idea de Descartes consiste en que, una vez introducido el sistema de coordenadas, tenemos la posibilidad de definir mediante una ecuación, por ejemplo lineal, una recta o mediante una ecuación, cierta ecuación de segundo grado, un círculo.

Entonces los objetos geométricos se convierten en ecuaciones, se convierten en objetos algebraicos y lo más interesante y realmente extraordinario de esta interpretación es que

recíprocamente las operaciones que nosotros podamos hacer entre los objetos algebraicos derivados, entre las ecuaciones derivadas, admiten una traducción en términos geométricos. De esto insistiré un poquito más adelante si me lo permite. ¿Y cómo se puede medir la distancia entre dos puntos? Bueno, ese por ejemplo sería un primer problema que desde el punto de vista clásico tiene un tratamiento completamente autónomo, es casi una noción, y sin embargo aquí otra vez se traduce en ecuaciones.

Si nosotros conocemos las coordenadas de esos dos puntos, pues podemos formar un triángulo que tenga dos lados paralelos a los ejes y justamente, un triángulo rectángulo, justamente cuya hipotenusa sea la distancia que queremos encontrar. Los catetos, los lados paralelos a los ejes, tienen como longitudes la diferencia entre las abscisas y las ordenadas de los dos puntos. De manera que el teorema de Pitágoras aquí se traduce en una condición algebraica.

La distancia es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de las abscisas y de las diferencias de las ordenadas. Este sin duda es, digamos, pues podría ser el primer ejercicio de esa traducción algebraica que supone ya la imposición de coordenadas a los puntos del plano. Y hablaremos ahora de las rectas, las rectas en el plano, es otro de los epígrafes importantes, ¿no?, de este capítulo.

Sí, la siguiente traducción importante consiste en que el concepto geométrico de recta se ve traducido por una ecuación lineal, que es la condición que deben cumplir las coordenadas de los puntos que estén en esa recta. A continuación, lo que estudiamos, digamos, son los posibles componentes de esa ecuación lineal y los interpretamos. Interpretamos expresada la recta como, en su forma lineal más sencilla, de la forma igual a a por x más b , vuelvo a insistir, representa la condición que deben cumplir las coordenadas x y y de los puntos que estén situados sobre la recta en la que yo estoy pensando.

Y ese coeficiente a , que multiplica a la x , tiene, como antes prometía, una interpretación geométrica. Es la pendiente de la recta y mide la inclinación que tiene la recta respecto de la horizontal. Cuanto más grande sea el coeficiente, más grande y positivo, más inclinada hacia arriba está la recta.

Si el coeficiente es negativo, la recta está inclinada hacia abajo. En resumen, que como vemos, es otro buen ejemplo de una posterior traducción de los términos algebraicos a propiedades geométricas. De la misma manera, como estudiaréis, el coeficiente b de la ecuación igual a a por x más b , admite también otra interpretación como la longitud de cierto segmento.

Y en general, pues el resto de la lección se dedica a estudiar con herramientas exclusivamente numéricas, algebraicas, este tipo u otro tipo de propiedades geométricas de las rectas. Así, por ejemplo, estudiamos la condición que deben reunir dos ecuaciones de dos rectas para que éstas sean paralelas, para que respondan al concepto intuitivo de paralelismo, o la condición que deben cumplir para que dos ecuaciones de dos rectas dadas para que éstas sean

perpendiculares, etc. En resumen, como conceptos fundamentales del capítulo, está un poco, y puedo insistir desde el punto de vista intelectual, el concepto de sistema de referencia y coordenadas de un punto.

Toda esa digresión que hice acerca de la traducción algebraica de los elementos geométricos, y luego, a partir de ahí, es un ejercicio casi continuo de conversión de las ideas geométricas en relación a las ecuaciones. Y en los apartados de polígonos y circunferencias, ¿esto no entra en el programa? No, es otro apartado que está, digamos, pues como colofón para no dar una impresión muy pobre de lo que es la geometría. Hablamos un poquito del concepto de polígonos y circunferencia y de las áreas de unos y de otros, pero no está en el Bien, pues ya nos veremos en el próximo programa.

Buenas noches. Y con matemáticas básicas acabamos el tiempo del curso de acceso y los programas de la UNED del día de hoy. Mañana comenzaremos con la Facultad de Psicología y sus espacios, Psicología Hoy y Vida y Salud.

Continuaremos sobre las 9 y cuarto con la revista de Ciencias de la Educación. Para acabar, y como es habitual, el curso de acceso y la asignatura Historia del Arte, que nos hablará de los artes bizantinos e islámico. Estamos aquí en Radio 1 FM de Radio Nacional de España.

Gracias por vuestra atención y hasta mañana.