

... Matemáticas básicas. Relaciones de orden. Autor, Joaquín Summers Gámez. Hemos estudiado en emisiones anteriores las relaciones binarias, profundizando por su interés en las relaciones de equivalencia. Ahora nos vamos a preocupar de otro tipo de relaciones binarias, las llamadas relaciones de orden. También son muy importantes, aunque su estudio en este curso no se realiza con tanta profundidad como en el caso de las relaciones binarias.

de equivalencia. Al decir relaciones de orden parece querer indicar su significación. Una relación de orden puede ser una relación binaria que trata de establecer un orden entre los elementos de un conjunto. Podemos dar una definición más adecuada, aunque la auténtica significación es la dada. Si entre los elementos de un conjunto está definida una relación que nos permite decidir entre dos elementos cuál de ellos consideramos como anterior, decimos que el conjunto está ordenado o que en él se ha definido una relación de orden. Cuando estudiamos las relaciones de equivalencia hemos visto que sobre un mismo conjunto se puede definir más de una relación de equivalencia. Esto suponía que sobre un mismo conjunto se pueden clasificar sus elementos siguiendo criterios distintos. ¿Ocurre lo mismo en el caso de las relaciones de orden? De una manera simple.

podríamos decir que cuando definimos sobre un conjunto finito una relación de orden total, que luego veremos lo que es, establecemos entre sus elementos uno que llamaremos primero y será anterior a todos los demás y otro que denominaremos último. Detrás del mismo no tendremos ningún elemento de este conjunto. Es evidente que este orden establecido entre los elementos de un conjunto es arbitrario. Está referido solamente a un criterio escogido entre las posibilidades existentes. Luego, si bien este tipo de relación binaria produce sobre un conjunto un efecto distinto que la relación de equivalencia, puede definirse de igual manera que ésta. Lo correcto sería decir que sobre un conjunto se define una relación de orden cuando se establece sobre o entre sus elementos un criterio. Lo suficientemente claro y rígido es que el conjunto de las posibilidades existentes es un criterio que se puede definir en un conjunto.

de manera que podamos averiguar, sin equivocarnos, cuando dados dos elementos, uno antecede al otro. Así, a los alumnos de una clase podemos ordenarlos según su estatura, su edad, su peso... Cualquiera de estos criterios es una relación binaria definida sobre el conjunto de los alumnos de una clase, de modo que engendran una ordenación entre sus elementos, o sea, determinamos un primer elemento. Los alumnos de la clase quedan ordenados de mayor a menor estatura, de mayor a menor edad, de mayor a menor peso. Vamos a ver si con un ejemplo puesto por usted podemos aclarar estas ideas. En primer lugar necesitamos un conjunto. Vamos a suponer uno. Cuyos elementos sean números. Por ejemplo, el conjunto...

de todos los números pares comprendidos entre los números 6 y 18. Por tanto, los elementos de este conjunto son los números 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 18. Sobre este conjunto podemos definir una relación binaria, que es una relación de orden, sin más que decir lo siguiente. Dos elementos de este conjunto están relacionados cuando, y sólo cuando, el primero es menor que el segundo. Se ve claramente que es una relación binaria, e incluso se intuye que es una relación de orden. Quiero decir que el criterio es suficientemente claro para determinar cuándo están relacionados o no. Si pienso en dos elementos cualesquiera, por ejemplo los números 2 y 14, observo que están relacionados. Están relacionados porque el número 2 es menor que el número 14.

Si el proceso que ha enunciado para los números 2 y 14 lo repetimos para todos los elementos del conjunto, llegamos a una circunstancia que ya habíamos previsto al iniciar la emisión. Obtenemos un número que es el más pequeño o menor de todos los números del conjunto y, como consecuencia, otro número que es mayor que todos los elementos de este conjunto. Hemos llegado, por tanto, a una ordenación consiguiendo un primer elemento y un último elemento. En este caso, la relación de orden afecta a todos los elementos del conjunto, pero ¿siempre ocurre lo mismo? Habíamos quedado en que una relación binaria puede afectar a todos o a unos cuantos de los elementos del conjunto en el que ha sido definida. Cuando estudiamos las relaciones de equivalencia, vimos que la relación de equivalencia es la que más afecta a todos los elementos del conjunto. Que afectaban a todos los elementos del conjunto de partida.

En cambio, las relaciones de orden no tienen obligatoriamente que relacionar todos los elementos del conjunto. Una relación de orden puede afectar a todos los elementos del conjunto sobre la que se ha definido o solamente a unos cuantos. En el primer caso, la relación de orden engendra una ordenación total, mientras que en el segundo origina una ordenación parcial. ¿Podría poner un ejemplo de este último caso, o sea, una ordenación parcial? Por supuesto. Sigamos con un conjunto cuyos elementos sean números. Supongamos el conjunto de los números naturales. Como todos recordamos, está formado por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. En este conjunto definimos la siguiente relación binaria, que es una relación de orden. Dos números naturales.

naturales están relacionados si, y sólo si, el primero es divisor del segundo. Es evidente que esta relación no afecta a todos los números naturales. Así, por ejemplo, los números 3 y 13 no son comparables. El 3 no es divisor del 13, ni tampoco el 13 es divisor del 3. Por tanto, es una relación de orden parcial. He observado que en la unidad didáctica, cuando se estudian las relaciones de equivalencia y de orden, se recurre a unas propiedades características de cada una, con lo cual su determinación es más sencilla. ¿Por qué no lo hemos hecho así? Efectivamente, en la unidad didáctica hemos hablado de unas propiedades que caracterizan a buena parte de las relaciones binarias. Reflexiva, simétrica, anticipada, simétrica.

y transitiva. Si una relación binaria verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, podemos afirmar que se trata de una relación de equivalencia. Mientras que, cuando cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, decimos que se trata de una relación de orden. Queda bien claro que pueden existir relaciones binarias que no verifican ninguna de estas propiedades. Ahora contesto a su pregunta. No hemos insistido en las propiedades porque hemos intentado resaltar y aclarar estos conceptos, cosa que muchas veces los alumnos pasan por alto, preocupados solamente en la operatoria. Nos hemos preocupado más de la significación de las relaciones de equivalencia y de orden que de la forma de dilucidar si, dada una relación, es esta de orden o de equivalencia. De acuerdo.

Entonces, conociendo y entendiendo la significación de estas propiedades, podemos detectar qué tipo de relación tenemos. Así es. Ahora creo sería interesante poder recopilar todo lo visto a lo largo de esta serie de emisiones radiofónicas para no perder, preocupados por los problemas parciales, la idea global que tanto nos interesa. Entonces, vamos a partir de la primera idea, o sea, de la definición de conjunto. Vamos a partir de la idea de conjunto por ser la más primitiva e intuitiva de todas las estudiadas. Conviene que el alumno

observe el proceso de elaboración que hemos seguido. Es fácil de recordar. Conjuntos, subconjuntos y relaciones entre los elementos de un conjunto o relaciones binarias. Hemos dado un criterio. Por medio del mismo podemos obtener un conjunto que en definitiva es una agrupación de objetos, una colección de elementos. El siguiente paso ha sido averiguar la posibilidad de que el alumno se sienta en un conjunto de elementos.

de determinar una parte de un conjunto, o sea, un subconjunto. Lo conseguíamos sin más que imponer una restricción a la definición del conjunto. ¿Puede poner un ejemplo? Sí. Supongamos el conjunto formado por todos los alumnos de matemáticas en un determinado colegio. Un subconjunto puede ser todos los alumnos rubios de la clase de matemáticas. Creo que el ser un alumno rubio supone una restricción. De acuerdo. Últimamente nos ha preocupado definir ciertos criterios de manera que podamos relacionar los elementos de un conjunto. Esto es, conociendo perfectamente los elementos de un conjunto, tratamos de relacionar sus elementos. De otra manera, tratamos de clasificar y de ordenar los elementos de un conjunto. Esto supone definir una relación de equivalencia o una relación de orden. Además, el efecto final es... Es conseguir.

Y se trata de una relación de equivalencia de unos subconjuntos del conjunto de partida en los que se agrupan todos los elementos equivalentes entre sí. Cada subconjunto es una clase. Cuando consideramos una relación de orden total en un conjunto finito, en definitiva llegamos a obtener un primer elemento y un último elemento. La relación de orden total es una clase.