

AC 10 102

Hola, buenas noches. Bienvenidos a este tiempo de radio educativo y cultural que la UNED propone a los alumnos del curso de acceso directo para mayores de 25 años, el CAT. Este es un espacio que elabora las distintas asignaturas que conforman el curso de acceso y que realiza el Centro de Diseño y Producción de Medios Audiovisuales de la UNED, emitimos a través de Radio Nacional de España, en Radio 3, frecuencia modulada, y en la 1359 de Onda Media.

Esta noche en nuestro programa Matemáticas Básicas, veremos las lecciones 4 y 5 que nos hablan de los números reales y la geometría analítica. Esta noche en Matemáticas Básicas nos acompaña el profesor Eduardo Ramos, muy buenas noches. Buenas noches.

Vamos a hablar de las lecciones 4 y 5, los números reales y la geometría analítica. Las magnitudes físicas como el tiempo, la distancia o el peso se miden en la práctica mediante los números racionales que ya vimos en el capítulo segundo. Parece que los números racionales deben permitir expresar con exactitud cualquier magnitud, pero ya los matemáticos griegos descubrieron que eran insuficientes para tomar medida de ciertas longitudes.

Una vez más, ¿es necesario ampliar el conjunto de números que manejamos? ¿Es así? Sí, en esta lección 4, que es la última del bloque dedicado al estudio de los conjuntos de números, descubrimos de nuevo, igual que cuando estudiamos los números enteros y cuando estudiamos los números racionales, que el conjunto de números que tenemos hasta ahora, que conocemos hasta ahora, que es el conjunto de números racionales, no es satisfactorio para resolver algunos de los problemas que se nos pueden plantear en la vida cotidiana. Ya vimos en la lección anterior, en la lección de ecuaciones, como uno de los problemas que resuelven las matemáticas es encontrar números que verifican ciertas condiciones que suelen expresarse como relaciones de igualdad entre esas incógnitas, esos números desconocidos y otros números que se suman, se restan o se multiplican con ellos. Hay una ecuación muy sencilla que se nos puede ocurrir rápidamente, que es la ecuación que consiste en encontrar un número que multiplicado por sí mismo sea igual a 2, es decir, un número cuyo cuadrado, en definitiva, un número x , cuyo cuadrado, x al cuadrado, es decir, x por x , sea igual a 2. Es muy fácil comprobar, y en el texto se recoge una demostración conocida desde hace mucho tiempo, desde el tiempo de los griegos antes de Cristo, siglo V antes de Cristo, que esa solución, esa ecuación, perdón, no tiene solución en el conjunto de los números racionales, es decir, no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2. Esta ecuación tiene una interpretación muy geométrica, muy sencilla, por cierto, es la ecuación del que quiere medir la diagonal de un cuadrado con un metro igual al lado del cuadrado.

Si consideramos un cuadrado cuyo lado sea un metro, la diagonal del cuadrado no tiene un número, no puede representarse como un número racional del lado. Es una frase que se repite de manera constante en los textos de matemáticas, que se dice que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con su lado. No hay un número racional, un divisor de la unidad del lado que pueda medir la diagonal.

Este hecho dejó desconocido, como he dicho, desde el tiempo de los griegos, dejó desconcertado a los griegos. Se encontraban los griegos, sobre todo en la escuela de Pitágoras, que creían que el número era el rey del universo, el que ordenaba todo el universo. Se dio cuenta que con los números racionales, que eran los que conocían, no se tenía una representación completa del mundo, por decirlo así.

Y al considerar estos números tan aparentemente raros, tan aparentemente difíciles de describir en los términos conocidos de fracciones, o de proporciones, o de razones, se les llamó números irracionales. Entonces descubrimos que el conjunto de números racionales tiene, por decirlo así, huecos. Es decir, entre dos números racionales siempre es posible, o siempre hay otro número, se puede encontrar otro número que no es racional, y está en medio de los dos.

Claro que estos huecos van a ser puntuales. Esto quiere decir que pegado a cualquier número racional, tanto como queramos, tan cercano a un número racional como queramos, se va a encontrar un número de estos irracionales. En definitiva, necesitamos ampliar el conjunto de números una vez más, considerando unos nuevos números que nos van a permitir resolver ecuaciones como las que he expresado antes.

X al cuadrado igual a 2. Estos nuevos números, que se llaman irracionales, cuya uno de sus prototipos o características es ese número que soluciona precisamente esa ecuación que conocemos seguramente todos, ya que es el número rey de dos, que es bastante familiar para un hombre actual, pues ese conjunto de números juntos con los que teníamos hasta este momento, los números racionales, forman el nuevo conjunto de números que manejamos a partir de ahora, que es el conjunto de números reales. Pero entonces, ¿qué es un número real? Bien, como ya he dicho, el descubrimiento de que existían números que no eran racionales es una cosa que el hombre conoció hace muchos milenios. Sin embargo, una definición precisa, matemática, formal, del concepto del número real no se dispuso de ya hasta el siglo pasado.

Es un poco, digamos, una construcción de bastante envergadura desde el punto de vista matemático la definición concreta del número real. En definitiva, vamos a dar una idea de cómo se construye la definición. Por ejemplo, en principio consideramos que un número de estos irracionales, o un número real cualquiera, puede tener infinitas cifras decimales, que ahí es donde está el gran problema.

Hasta ahora manejábamos números racionales que tenían un número infinito de cifras decimales, o tenían un número infinito pero con una construcción periódica que sabíamos reproducir. Por ejemplo, consideramos un número cuya construcción sea como ésta, uno coma decimal 0 7 0 0 7 7 0 0 0 7 7 7 0 0 0 0 7 7 7 7. Tenemos una construcción sistemática pero no es representable mediante una fracción. Este define un número real mediante un número cuya aproximación en número de cifras decimales cada vez es mayor, que tiene cada vez más cifras decimales.

Claro que hay otros números como ese que estamos utilizando como prototipo de los números irracionales, que es el rey de 2, cuya representación no es tan sencilla, no tiene una regla de

construcción tan evidente. Pero este número se puede construir como dos sucesiones, una que está siempre por debajo de él y otra que está siempre por encima de él. Esta es la idea de construcción de números reales.

Y entonces, para construir un número irracional raíz de 2, podemos considerar dos sucesiones. Una de ellas se acerca por debajo de su valor a ese número, dos sucesiones de números racionales, por supuesto, y otra se acerca a él por encima. Sucesiones típicas podrían ser la sucesión de números por abajo, que sería 1.41, 1.4142, 1.41421, 1.414213. Cada vez tenemos más cifras decimales, cada número es mayor que el anterior y va creciendo.

Tiene un número finito de cifras decimales, es un número racional. Y por arriba, podríamos considerar una sucesión de números racionales como ésta, 1.42, 1.4143, 1.41422, 1.414214, etcétera. Es decir, una sucesión de números que va decreciendo, cada uno es más grande que el siguiente, y se acerca a ese valor racional, ese valor ideal, que nunca se alcanzará en un número finito de cifras, que es el valor del número irracional raíz de 2. En resumen, nos sentimos obligados, por las necesidades que nos plantean problemas cotidianos, como es la resolución de algún tipo de ecuación como x al cuadrado igual a 2, a considerar un nuevo conjunto de números que son los números reales.

Y los números reales se definen como un par de sucesiones, o sea, un número real viene definido por un par de sucesiones de números racionales, una que va creciendo y otra que va decreciendo, de tal forma que la diferencia entre los términos de la sucesión que va decreciendo y la que va creciendo se hace tan pequeña como se quiera. Es una idea un tanto difícil, seguramente, de entender, pero ya digo que es la construcción típica y la construcción de definición del número real. Y este sería el concepto de número real que vemos en esta lección.

En efecto, cualquier par de sucesiones de números racionales r_1, r_2, r_3 , que sea creciente, cada número mayor que el anterior, y otra sucesión r'_1, r'_2, r'_3 que sea decreciente, cada número más pequeño que el anterior, tal que la diferencia entre dos términos $r''-r'$ sea tan pequeña como se quiera, ese par de sucesiones definen un número real. Vamos a ver un ejemplo obvio que servirá para descubrir de nuevo cómo los números racionales están incluidos dentro de los reales. Por ejemplo, las sucesiones 1.399, 1.3999, 1.39999, es decir, una cada vez una de más.

Esta sucesión se va acercando hacia un número que es evidente, que es el 1.4. La sucesión 1.4001, 1.4001, 1.40001. Esta sucesión, como vemos, es una sucesión de números racionales que cada número es más pequeño que el anterior y se va acercando hacia el punto número 1.4. Como vemos, la diferencia entre los términos de la sucesión de los 1.4001 y la sucesión 1.3999 se hace tan pequeña como se quiera. Entonces vemos cómo este par de sucesiones definen a un número real, que es el número real 1.4, que en este caso también era un número racional. Puedo añadir además que de estos números, además de los números reales, hay muchísimos que no son fraccionarios.

Uno de los más característicos o de los más típicos es el número famoso número π , que es un

número que también es un número irracional, no tiene una expresión fraccionaria. Con esto, digamos que una vez construido el conjunto de números reales, de alguna manera finalizamos el estudio de los conjuntos de números en este curso. No tenemos todos los problemas respuestos que nos pueden plantear.

Todavía hay otro conjunto, hay problemas del tipo que estamos considerando como la ecuación x al cuadrado igual a menos 1, que no tienen solución en el conjunto de los números reales. Es decir, no hay ningún número que elevado al cuadrado de igual a menos 1, ni siquiera en el conjunto de los números reales. Esto nos obliga, obliga a las matemáticas a considerar un nuevo conjunto de números, que es el conjunto de números complejos, pero que ya no son objeto de este curso.

Pero no está de más que nuestros alumnos conozcan que todavía hay problemas que no hemos resuelto del estilo de considerar ecuaciones, etcétera, con el conjunto de los números reales. Bueno, por lo pronto nos quedaremos todavía con los números reales, que quizá ya sea de por sí un concepto bastante abstracto para complicarnos más. ¿Y podemos pasar entonces a ver qué es lo que se estudia sobre los números reales en esta lección? Una vez comprendido el concepto número real, la parte de la lección consiste en ver cómo se opera con ellos, que en esencia es exactamente igual que operar con números fraccionarios o con cualquier otro, otros números que hemos manejado hasta ahora, el considerar cómo están ordenados y el considerar un aspecto que son relativamente nuevo en este, que es el concepto de potencias y raíces, los aspectos de potencias y raíces.

Bien, en cuanto a las operaciones, ya vemos que son las mismas operaciones que con cualquier otro número. No tiene ninguna variación. ¿Habría algo que añadir ahí? No, conceptualmente se manejan con un número cualquiera.

Si se quiere hacer una aproximación práctica, que luego se verá en la lección de matemática del computador, cómo se tiene, los problemas que pueden presentarse cuando se opera con un número finito de cifras decimales, de un número que teóricamente tiene infinitas cifras decimales, pero bueno, en la práctica con las calculadoras se puede trabajar con un número real, por ejemplo, con el número raíz de 2, se puede trabajar como con 1,41, 1,41, 2, para los efectos prácticos esa aproximación es suficiente. ¿Y en cuanto a la ordenación, cómo se ordenan? Bueno, esto es una de las ideas clave del conjunto de números reales, es que está totalmente ordenado. Para las fracciones, ya lo sabíamos, siempre sabíamos si una fracción era mayor que otra.

Bastaba reducirlas a común denominador y veíamos cuál de ellas tenía mayor numerador. Esta propiedad se hereda para el conjunto de números reales, es decir, dados dos números reales, siempre se puede saber cuál de ellos es mayor, simplemente comparando las sucesiones de números fraccionarios con las que definen. Es un concepto realmente importante, o sea, una idea realmente importante, que el conjunto de números reales está totalmente ordenado.

Lo cual, a primera vista, con la definición tan difícil que hemos estudiado y con la posibilidad de

conseguir infinitas cifras decimales, siempre nos podía quedar la duda, si podía en las infinitas cifras decimales dar la vuelta al orden, pero eso no ocurre. ¿Podemos, una vez explicado esto, hablar de potencias y raíces? Sí, pues ya que estamos considerando un número del estilo raíz de 2 y raíz de 5, se nos abre paso a la posibilidad de trabajar con raíces y potencias. Una potencia n -ésima, la potencia n de un número real a , pues es simplemente repetir por factor el número a , es decir, es a por a por a n veces.

Y la potencia, perdón, y la raíz n -ésima de un número real a , es decir, es raíz n de a , es aquel número b tal que su potencia n -ésima es igual a a . Es decir, es la operación inversa de la potenciación, es la radicación. Se representa la raíz n -ésima por $\sqrt[n]{a}$, la potencia n -ésima se representa por a^n y la raíz n -ésima se representa simbólicamente por $a^{1/n}$. Eso es una convención, como se puede utilizar otra cualquiera. Es la más común y lo más sencillo.

Y aquí hay algunas propiedades de las potencias y raíces que son toda de sencilla comprensión que conviene repasar. Bien, al añadir los números irracionales a los racionales, pues muchas ecuaciones pasan a tener solución dentro del conjunto de los números reales. ¿Están entre ellas las ecuaciones de segundo grado? Sí, la parte final de este capítulo de los números reales se dedica al estudio de la ecuación de segundo grado.

Recordemos que una ecuación es una relación que liga unas cantidades desconocidas que se llaman incógnitas con números, en este caso ya números reales y operaciones, sumas, restas, multiplicaciones, de forma que se trata de encontrar qué cantidades verifican esa condición. Ya hemos discutido en la lección anterior cómo ese problema abre un sinfín de posibilidades de resolución de casos prácticos. Al considerar potencias y raíces tenemos la posibilidad de considerar genéricamente la ecuación de segundo grado.

Es una ecuación de segundo grado con una incógnita porque tiene una sola incógnita, la x , y va a estar elevada esa x a una potencia igual a 2, por eso se dice de segundo grado. De forma genérica se representa como $ax^2 + bx + c = 0$, en donde la x es la incógnita y a , b y c son los coeficientes. a es el coeficiente del término de segundo orden, b es el coeficiente del término de primer orden y c es el término independiente.

El estudio que hay que hacer de la ecuación de segundo grado en esencia es discutir cómo se resuelve, es decir, encontrar una expresión, algo que nos diga cuáles son las soluciones de esa ecuación. Y ahí en el texto se hace un desarrollo matemático que permite llegar a la conclusión que en realidad es la que hay que recordarse y la que hay que manejar, que hace referencia a una expresión que se llama el discriminante de la ecuación, que es la expresión $b^2 - 4ac$, es decir, b es el coeficiente del término de primer orden, a es el del coeficiente del término de segundo orden y c es el término independiente. Bueno, por la expresión $b^2 - 4ac$, que se llama discriminante, según sea positiva, es decir, mayor que cero, negativa, es decir, menor que cero o igual a cero, nos ilustra, nos dice cuáles van a ser las soluciones de la ecuación de segundo grado.

Si el discriminante $b^2 - 4ac$ es mayor que cero, entonces la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones diferentes, cuya expresión es la fórmula relativamente conocida, que en este curso hay que manejar, que es $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, esa es una de las soluciones, la que llamaríamos x_1 , y la otra solución, x_2 , sería $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Si el discriminante $b^2 - 4ac$ es igual a cero, entonces la ecuación de segundo grado tiene una única solución, que es la solución x igual a $-\frac{b}{2a}$. Y el tercer caso, si el discriminante $b^2 - 4ac$ es menor que cero, entonces la ecuación no tiene solución, es decir, no hay ningún número real que cumpla la ecuación dada.

Sería el caso parecido a ese que comentamos antes, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tienen soluciones reales. En esta lección, en la lección 4, también hablan de exponenciales y logaritmos y de aplicación a cálculos financieros, sin embargo, estos apartados no son materia de examen. Sí, con esto último que acabo de decir, la ecuación de segundo grado finaliza lo que se exige como texto para el examen, pero en este capítulo de los números reales hemos incluido algunos temas que son interesantes para un curso general de matemáticas como es la idea de exponentes y logaritmos, exponenciales y logaritmos, y algunas consecuencias de estas cosas como pueden ser los cálculos financieros, es decir, cómo se puede calcular el interés de una cuenta corriente, cómo se puede buscar la anualidad, cómo se amortiza una cantidad C , etc.

Pero, desde luego, esto, como son unos cálculos que hay que recordar y son un poco más complicados, no se exigen en las pruebas presenciales. Bien, pues podemos pasar a comentar a continuación el capítulo número 5, la geometría analítica. La geometría es una de las actividades matemáticas más antiguas, sin embargo, durante siglos se estudiaba como una disciplina con pocas relaciones con otras ramas de las matemáticas.

¿En qué momento de la historia la geometría se ve de una manera más matemática? Sí, efectivamente, la palabra geometría en su etimología nos dice mucho de la actividad matemática que realiza, es la medida de la Tierra. Entonces, no es de extrañar que los primeros, desde los tiempos más remotos de la humanidad, sobre todo los hombres apegados a la Tierra, a la agricultura, se vieran en la necesidad de idear métodos de cálculo de superficies, de distancias, etc. Y, efectivamente, grandes matemáticos fueron los representantes de civilizaciones antiguas como los egipcios, los babilonios y los griegos.

De todos es conocido la escuela de griegos, de matemáticos, que fueron grandes geómetras. La aproximación que se hizo durante mucho tiempo en la historia a los problemas de geometría es una resolución de los problemas de geometría mediante lo que se dan llamar las técnicas de resolución mediante regla y compás, es decir, los razonamientos sobre igualdad de figuras, semejanzas, desplazamientos, movimientos, giros, etc. Un razonamiento que se llama intrínseco, que hace referencia a una geometría que es la geometría intrínseca.

Nada ajeno a la geometría está dentro de ese tipo de razonamiento. Ángulos, distancias,

medidas, etc. es lo que hay dentro de este razonamiento intrínseco.

Sin embargo, ahí en el propio texto tenemos algún ejemplo de cómo se hace un razonamiento intrínseco referente al teorema de Pitágoras. Rápidamente, todos los que hayan tenido un poco de experiencia en geometría saben que los razonamientos intrínsecos de geometría son muy laboriosos, muy complicados. Es necesario reflexionar mucho sobre ellos para ocurrirse en el camino.

Y esto, en alguna medida, implicó, sin duda, un desarrollo menos acelerado de la geometría de lo que sería, seguramente, fue deseable. Por el siglo XVII, un matemático y filósofo francés, Renato Descartes, en su discurso del método, introdujo una nueva aproximación a la forma de ver la geometría que se llama actualmente geometría analítica. En esencia, un razonamiento analítico en geometría consiste en cambiar los conceptos geométricos por conceptos algebraicos.

De forma que se identifican, como veremos ahora a continuación en un momento, los puntos del plano o del espacio con pares o ternas de números. Las rectas con ecuaciones. En definitiva, las figuras geométricas con alguna representación algebraica de las mismas.

Y en este momento, toda la herramienta del cálculo, todo lo que hemos estudiado sobre ecuaciones, todo lo que hemos estudiado sobre las sumas, las restas de las operaciones con los números, vienen en ayuda de los problemas de la geometría y simplifican notablemente los cálculos y los razonamientos geométricos. Es decir, en vez de tener que recurrir a construcciones artificiosas u ocurrentes, muchos de los problemas de geometría se convierten en simples rutinas de cálculo. Esto, sin duda, ha sido uno de los momentos estelares de la historia del pensamiento matemático.

Por lo tanto, en esta lección se estudia el sistema analítico, la geometría analítica. Desde el punto de vista analítico, efectivamente, que es lo que es más sencillo. Entonces, se comienza estudiando lo que es un sistema cartesiano de referencia, que consiste en tres cosas.

Un punto que ejerce como origen unos ejes, dos rectas que se cortan en ese punto de manera perpendicular, y unas unidades de medida que se toman en cada eje. Una vez tenido ese sistema de referencia, disponiendo de ese sistema de referencia, cualquier punto del plano geométrico se convierte en un par de números reales, x y y , simplemente considerando las proyecciones de ese punto hacia encima, sobre las ejes que hacen de coordenadas. Este sistema, que se llama cartesiano precisamente en honor a Descartes, como decíamos antes, es uno de los, seguramente, en mi opinión, descubrimientos más ingeniosos del hombre para referirse a problemas geométricos.

Y es bastante usual, porque así se refieren, por ejemplo, en el mundo de la longitud, la latitud, las coordenadas de un punto sobre la esfera terrestre, es una idea similar. Y una vez considerado este sistema cartesiano, el resto de la lección se dedica a ver cómo algunos de los problemas geométricos que pueden considerarse se reducen a cálculos algebraicos. Entonces,

el primer problema geométrico que consideramos es cómo averiguar la distancia entre dos puntos, que se podría hacer con un metro, pero disponiendo de las coordenadas de los dos puntos, por ejemplo, si las coordenadas de un punto son x e y , y las de otro punto son x' y y' , la distancia entre los dos puntos tiene una fórmula muy sencilla, es la raíz cuadrada de las diferencias de x' menos x al cuadrado, más y' menos y al cuadrado.

Una fórmula algebraica muy sencilla. La segunda idea geométrica que se convierte en algebraica es cómo se representa una recta. Pues una recta que tiene una representación gráfica en un plano, que es una idea geométrica, desde el punto de vista algebraico, es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Una ecuación del estilo $ax + by + c = 0$, ecuación genérica de primer grado con dos incógnitas, es la representación de una recta. Es lo mismo trabajar con una recta e ir haciendo dibujos en el plano que trabajar con ecuaciones. Y dicho eso, pues, por ejemplo, para encontrar la recta que pasa por dos puntos, lo único que tenemos que hacer es resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

O sea que, en definitiva, o también, para ver si un tercer punto, o si tres puntos están alineados, mejor dicho, para ver si tres puntos están alineados, lo único que tenemos que mirar es si un tercer... calcular la recta que pasa por dos puntos de ellos y ver si el tercer punto verifica la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos. Estoy diciendo esto un poco deprisa, pero, en definitiva, la idea que hay que resumir y que hay que pensar en esta lección es ver que, una vez que tenemos el sistema de referencia cartesiano, hay multitud de problemas de tipo geométrico clásicos que se pueden estudiar, abordar, desde una óptica de ecuaciones, resolución de sistemas, etc. Incluso, aunque ya no entran para los exámenes, una vez más, hay figuras, como las circunferencias, que también tienen una ecuación que las representa.

En definitiva, tienen una representación algebraica. Esta es la idea que me interesaría recalcar en esta lección. Cómo, mediante cálculos algebraicos, se pueden resolver problemas geométricos una vez que se dispone de un sistema de referencia de tipo cartesiano.

Ya hemos agotado nuestro tiempo. Hemos visto las lecciones 4 y 5 en el próximo programa. Veremos las 6 y las 7. Y despedimos así el curso de acceso.

Muchas gracias y hasta el próximo programa. Hasta el próximo programa y un saludo muy cordial a todos nuestros alumnos. Gracias por acompañarnos.

Que pasen una feliz noche. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org