

AC 15 82

Esta noche en Matemáticas Especiales vamos a ver los temas 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Nos acompañan los profesores Delgado y la profesora Valencia. Muy buenas noches. Buenas noches a ti, Isabel, y a todos los alumnos del curso de acceso.

Buenas noches a todos. Bien, ¿qué nos van a contar esta noche? Esta noche vamos a comentar algunas cuestiones de Matemáticas Especiales del curso de acceso. Concretamente, como has comentado, nos ocuparemos de los temas del 4 al 9 de esta asignatura.

Pues debemos empezar entonces por el primer tema, el tema 4. El tema 4 nos habla de combinatoria. Efectivamente, la combinatoria se inicia como una disciplina científica en los trabajos del gran Leibniz, allá por el año 1666. Posteriormente, Bernoulli la incorpora como una herramienta básica para el cálculo de probabilidades en el año 1713, creo.

Bien, ¿pero en qué consiste la combinatoria? En esencia, es una técnica de contar las formas de elegir un número de elementos de un conjunto. Para saber contar el número de elecciones distintas, debemos saber si algún elemento se puede elegir más de una vez. En ese caso, se dice que existe repetición de elementos.

¿Se puede poner algún ejemplo? Si contamos números de tres cifras impares, es evidente que el 135 es uno de ellos, pero el 111 también lo es. Luego, se eligen tres cifras en un conjunto formado por los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9, y las cifras se pueden repetir. Además, si al elegir los elementos comprobamos que hay diferencia entre sí, si se eligen cada uno a uno o si se eligen todos a la vez, entonces decimos que existe orden, en el caso de que exista diferencia.

En el ejemplo puesto anteriormente, se observa que no es igual elegir el 1, el 3 y el 5, que forman el número 135, que elegir el 5, el 3 y el 1, que formarían el número 531. Así pues, es muy importante el orden de colocación de cada dígito elegido. Si nos dijeran que el número de tres cifras elegido tiene un 5, un 3 y un 1, no sabríamos de qué número se trata, pues existen seis números distintos con esos dígitos.

Esto sería un ejemplo de orden, pero ¿algún ejemplo de no orden? Supongamos que a dos de los tres que estamos aquí nos den un billete de mil pesetas. Es claro que elegir a Teresa y a Isabel es lo mismo, tanto si se eligen una a una como si se eligen a la vez. Otra cosa sería si nos dieran un billete de mil y otro de cinco mil pesetas.

Si en la elección existe orden, distinguimos dos tipos, variación y permutación. Y si no existe orden, tenemos la combinación. ¿Y qué diferencia existe entre la variación y la permutación? La diferencia consiste en el número de elementos elegidos.

Si se eligen todos, entonces decimos que se trata de una permutación. Y si no se eligen todos, se dice que es una variación. Así pues, la permutación es un caso particular de variación.

En la que intervienen todos los elementos del conjunto. ¿Qué se puede resaltar más de este tema 4? En este tema también se introducen los números combinatorios y sus propiedades, que nos permiten exponer el desarrollo del binomio de Newton. Es decir, el desarrollo de la potencia n -ésima de un binomio o suma.

¿Y qué importancia tiene este tema respecto a las pruebas presenciales? Es fácil que se tenga que recurrir a la combinatoria para resolver un problema bien de contar o bien de probabilidad. Pues tenemos que pasar ya al tema 5. El tema 5 nos habla de probabilidad. ¿Pero en qué consiste la probabilidad? La teoría de la probabilidad trata de medir la facilidad de que se produzca un resultado relativo a un experimento aleatorio.

Es decir, un experimento en el que no se puede predecir el resultado. Por ejemplo, si consideramos la suma de puntos obtenidos al lanzar dos dados. ¿Es igual de fácil que salga una suma par o suma impar? ¿Por cuál número apostaríamos? Evidentemente, no se puede saber el resultado que se obtiene al realizar ese experimento.

Sin embargo, sí sabemos cuáles son los posibles resultados. Los números del 2 al 12, que es lo que llamamos espacio muestral. A cada posible resultado se le denominamos suceso elemental.

Y en esencia se trata de conocer la probabilidad de cada suceso elemental. Por ejemplo, un suceso elemental sería obtener suma igual a 5. ¿Qué podemos destacar de este tema? ¿Qué es lo importante? Lo más importante de este tema es comprender cuatro cosas. Primero, ¿qué es un experimento aleatorio? Segundo, ¿cuál es el espacio muestral de un experimento de este tipo? Tercero, ¿qué es un suceso? Y cuarto, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra un suceso? Pues podemos empezar por preguntar ¿qué es un suceso? Se llama suceso a todo subconjunto del espacio muestral.

Es decir, a cualquier familia de sucesos elementales. ¿Y un ejemplo de suceso no elemental? Por ejemplo, obtener un número múltiplo de 3 en el experimento anterior. Obsérvese que este suceso está constituido por los sucesos elementales obtener un 3, obtener un 6, obtener un 9 y obtener un 12.

¿Cómo calculamos la probabilidad de un suceso? Lo primero que se debe hacer es comprobar si todos los sucesos elementales poseen la misma probabilidad. En ese caso se dice que se trabaja con un espacio muestral equiprobable. En el caso de la suma de dos dados, se observa que no se tiene un espacio muestral equiprobable puesto que obtener un 2 es menos probable que obtener un 7. En cualquier caso, para calcular la probabilidad de un suceso trataremos con un espacio muestral equiprobable.

Por ejemplo, el espacio muestral del experimento de lanzar un único dado. Para calcular la probabilidad en un espacio equiprobable utilizamos la regla de Laplace. La probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Es decir, el número de sucesos elementales que poseen el suceso dividido por el número de sucesos elementales que hay en el espacio muestral. Observa, Isabel, la importancia que tiene saber contar casos. Es decir, la importancia que tiene la combinatoria para el tema este de la probabilidad.

Pues también tendríamos que ver aquí qué es lo que hay que resaltar de este tema número 5. Sí, hay más que resaltar. Sin duda, un concepto importante es el de probabilidad condicionada. Se llama probabilidad condicionada de un cierto suceso A respecto a otro suceso Q a la probabilidad de que ocurra el suceso A suponiendo que ya ha ocurrido el suceso Q. Supongo que nos pedirás un ejemplo.

Pues sí, vamos a ver algún ejemplo. Tomemos dos sucesos del experimento obtener una carta de una baraja. El suceso A es obtener un oro y el suceso Q obtener una carta múltiplo de 4. La probabilidad de obtener un oro es un cuarto, es decir, 10 casos favorables dividido por 40 casos posibles.

La probabilidad de obtener una carta múltiplo de 4 es un quinto, es decir, 8 casos favorables dividido por 40 casos posibles. Sin embargo, si sacamos una carta que es múltiplo de 4 y nos preguntamos la probabilidad de que dicha carta sea un oro, estaremos estudiando la probabilidad de A condicionada a Q. ¿Cuál es? Sería un cuarto. ¿Y qué importancia tiene este tema? También vamos a hablar, igual que hicimos con el tema 4, respecto a las pruebas presenciales.

Este tema es muy importante, pues casi seguro que era un problema de probabilidad, presumiblemente de aquellos que hay que aplicar la regla de Laplace. Quiero hacer hincapié nuevamente en la importancia que tiene el tema anterior para este tema de probabilidad. O sea que hay que estudiar el tema 4 y el tema 5. Y pasamos ya al tema 6, que nos habla de estadística descriptiva.

La estadística descriptiva tiene como función analizar la estructura matemática asociada a cualquier masa de datos numéricos o no. Esta estructura se describe en relación a determinados parámetros que aportan información sobre los rasgos de los datos ya estudiados. ¿Cuál es el contenido del tema? En este tema se introducen las definiciones estadísticas básicas, como son población, variable estadística, media, desviación y otras muchas más.

Es un tema fácil de estudiar, pues en esencia se trata de analizar la población basándose en una tabla estadística. Sí, en el programa de esta noche vamos a hablar menos de él. Esto quiere decir que tiene menos importancia respecto a las pruebas presenciales, claro.

Es poco probable que se incluya un problema de esta parte, pues la confección de una tabla estadística requiere bastante tiempo y eso es algo que suele escasear en los exámenes. Pues bien, pasamos entonces al tema 7, el sistema de ecuaciones lineales. Efectivamente, aunque este tema sólo es la introducción de los dos siguientes temas que trataremos, resolver sistemas

de ecuaciones es una de las tareas que más frecuentemente aparece en otras ciencias.

En este tema únicamente se introducen los sistemas de ecuaciones que son lineales. ¿Pero qué es un sistema de ecuaciones lineales? Lo primero que te debo explicar es que es una ecuación lineal con varias incógnitas. Para ello yo te pondré un ejemplo.

Supón que hemos decidido gastarnos mil pesetas en la cafetería al salir del estudio. Para ello a ti te pido que aportes el triple del dinero que hay sobre la mesa y a Teresa que ponga el doble de lo que tiene en la mano, pues el resto lo pongo yo. ¿Sabes cómo podría un alumno describir todo esto de alguna manera en una ecuación? ¿Pues cómo? Con una sencilla ecuación lineal con tres incógnitas.

Veamos. 3 por x más 2 por y más z igual a mil. Es decir, $3x + 2y + z = 1000$.

Donde x es la cantidad de dinero que está sobre la mesa, y representa la cantidad que tengo en la mano, y z lo que aporta Miguel. Esto es una ecuación lineal. Aquella en que las incógnitas ni se multiplican ni se dividen entre sí.

Ni existen potencias o cualquier otra función actuando sobre ellas. Y un sistema de ecuaciones lineales no es más que un conjunto de ecuaciones lineales. ¿Qué es lo importante de este tema? En este tema lo más importante es, primero, comprender qué es un sistema y habituarse a su escritura.

Después, saber qué es resolver un sistema. En el libro de problemas se muestran los métodos tradicionales de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Y por último, saber transformar un sistema en otro que sea equivalente.

Que es la esencia del método de resolución que se llama De Gauss. ¿Se puede resaltar algo más del tema? Ya te hemos dicho que es un tema de introducción a los dos siguientes. Por ello, en este tema se introducen las matrices como elementos para describir de una forma sencilla cualquier sistema de ecuaciones lineales.

¿Y en cuanto a las pruebas presenciales es importante? Este tema es muy importante, puesto que seguro que se propondrá un problema de sistemas de ecuaciones lineales. Bien, y pasamos al tema 8. Matrices y determinantes. Las matrices se introducen en el tema anterior, partiendo de los sistemas de ecuaciones lineales.

Sin embargo, constituyen un nuevo conjunto de elementos matemáticos que también se debe estudiar. Las matrices son conjuntos numéricos distribuidos en filas y en columnas. ¿Para qué trabajar con matrices? Si bien no se puede establecer una estructura algebraica sobre el conjunto de todas las matrices, es cierto que se puede establecer una estructura similar a la de los números enteros en el conjunto de las matrices que tienen un mismo tamaño.

Así pues, se puede operar con matrices de forma análoga a como se opera con dichos números. Se define entonces la suma de matrices de igual orden y el producto de un número

por una matriz. También se puede definir un producto de matrices si bien requiere que las dos matrices tengan unas determinadas características.

Al considerar todas las matrices cuadradas de un cierto tamaño con la suma y el producto de matrices junto con el producto de un número por una matriz, nos encontramos con una situación similar a la que se presenta en los números enteros. Las matrices cuadradas son aquellas que tienen el mismo número de filas que de columnas. Pues parece algo difícil operar con matrices, ¿es así? No, es sencillo, pues en el fondo se realizan varias operaciones numéricas.

Tan sólo hay que tener cuidado y ser consciente que sólo se puede hacer aquello que se indica en el texto base. ¿Se puede dividir matrices? Esta pregunta es análoga a la siguiente. Si trabajamos sólo con números enteros, ¿podemos dividir números enteros? La respuesta a esta última pregunta es no, aunque hay situaciones en las que sí se puede dividir.

Por ejemplo, 48 es divisible por 4. Así en las matrices ocurre algo parecido. Observa que 48 dividido por 4 es lo mismo que multiplicar 48 por 1 cuarto, es decir, multiplicar 48 por el número real inverso al 4. Dentro del conjunto de las matrices cuadradas, de un cierto orden, también existen matrices que poseen matriz inversa. Así pues, para estas matrices sí tiene sentido tu pregunta de la división.

¿Cómo se sabe si una matriz posee inversa? Sólo las matrices cuadradas son susceptibles de poseer matriz inversa. Y para poder determinar qué matrices poseen inversa, se introduce el concepto de determinante. Aquellas matrices cuadradas que posean determinante no nulo, es decir, determinante distinto de cero, son las que poseen matriz inversa.

Si se multiplica una matriz por su inversa, se obtiene la matriz identidad. La matriz identidad es una matriz cuadrada en la que todos sus componentes son cero menos los de la diagonal, que son unos. La diagonal está formada por los elementos que están situados en igual fila que columna.

Es decir, el primero de la primera fila, el segundo elemento de la segunda fila, el tercero de la tercera fila, y así sucesivamente. Hay algo más que resaltar en este tema 8. Tan sólo las propiedades de los determinantes, puesto que aplicando estas propiedades es mucho más fácil calcular el determinante de una matriz. Y en cuanto a las pruebas presenciales, ¿qué importancia tienen? Preguntas directas sobre matrices pueden solicitarse, pero sobre todo las que hacen referencia a operaciones con matrices y las que hacen referencia a las propiedades de los determinantes.

Además, seguro que hay una pregunta de sistemas de ecuaciones lineales, y para resolverla puede que se tenga que hacer uso de matrices y determinantes. Bien, y llegamos al tema 9. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices. Este es un tema muy importante, puesto que seguro que se formulará una pregunta de este tema.

Pues, efectivamente, seguro de este tema o de los dos anteriores. Bien, ¿y qué podemos decir de este tema? En este tema se formula el teorema de Roche-Frobenius, que es la herramienta que utilizamos en el análisis y resolución de cualquier sistema de ecuaciones lineales. ¿Por qué es importante este teorema? Es muy importante porque nos da una regla con la cual se sabe si un sistema posee solución, que en ese caso el sistema se llama compatible, o no la posee, que se llama sistema incompatible.

Y en el caso de que sea un sistema compatible, es decir, que posea solución, si posee una solución única, que entonces el tipo de sistema se dice compatible determinado, o si al contrario tiene varias soluciones, entonces se dice compatible indeterminado. Este teorema se basa en el estudio del rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada. Si estos dos rangos son iguales, entonces el sistema posee solución, es decir, es un sistema compatible.

Y si este rango es igual al número de incógnita, entonces se dice que tiene solución única, es decir, se trata de un sistema compatible y determinado. ¿Cómo se determina la solución de un sistema de ecuaciones lineales? Si el sistema es compatible y determinado, es decir, que posee solución única, entonces podemos aplicar la regla de Kramer, o bien podemos aplicar el método de Gauss, o también el método de la matriz inversa. Bueno, hemos visto que este tema es muy importante, pero a mí, antes de acabar el programa, me gustaría repasar un poco lo que hemos visto esta noche, todos estos temas.

Lo más importante de estos temas, porque yo creo que ya entramos en materia un poquito más complicada para los alumnos. Bien, podemos empezar con el tema 4. ¿Qué podríamos destacar? El tema 4 es importante, pues en el cálculo de probabilidades vamos a utilizar la fórmula de Laplace, y así muchas veces nos vamos a encontrar que es necesario contar combinatoriamente tanto el número de casos favorables como el número de casos posibles. ¿Es un tema muy práctico, es decir, el alumno debe hacer los mayores ejercicios que pueda, o es un tema teórico? Es un tema totalmente práctico.

Sin embargo, hay que saber analizar muy bien si es posible la repetición, y además también si existe o no orden para saber aplicar una fórmula u otra. Si vemos que es importante el orden, entonces es un caso de variaciones. Si vemos que no influye el orden a la hora de formar los conjuntos, entonces es un caso de combinaciones.

Bien, ¿podríamos poner algún ejemplo? Bueno, un ejemplo podemos considerar el suceso de obtener una pareja de sotas correspondiente a un experimento que consiste en extraer dos cartas de una baraja española, claro. Entonces podemos comprobar que tenemos combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2 como el número de casos favorables de este suceso, y combinaciones de 40 tomados de 2 en 2 como el número de casos posibles. Bien, esto sería entonces lo más importante del tema 4, el tema de la combinatoria.

Y en el tema 5, el que habla de probabilidad, ¿qué es lo importante? En el tema 5 lo más importante a destacar es calcular la probabilidad utilizando sobre todo la fórmula de Laplace.

Para ello hay que asegurarse de que se trata de experimentos que generan un espacio muestral de sucesos equiprobables, sucesos elementales equiprobables. Dicha fórmula, la fórmula de Laplace, que ya hemos comentado antes que nos sirve para hallar la probabilidad de un cierto suceso, y que es igual a un cociente en el cual el numerador es el número de casos favorables a este suceso, y en el denominador el número de casos posibles, la tienen en el libro de teoría en la página 102.

Es la fórmula más importante de este tema, fórmula que van a tener que utilizar, es una fórmula muy útil a este nivel en el tema de probabilidad. ¿También es un tema muy práctico o no? Es un tema totalmente práctico, porque aquí lo que le vamos a pedir al alumno es que haga el cálculo eficaz de una probabilidad. ¿Entonces ir al libro de problemas constantemente? Sí.

Todo lo que se pueda. Sí, daremos un experimento y entonces tendrán que seguramente hallar a lo mejor la probabilidad, pero previamente tendrán que hacer el espacio muestral y ver para la probabilidad el número de casos favorables y posibles. También es conveniente que miren a ver si este experimento está condicionado a algo, o es un suceso independiente o no, porque entonces tendrán que utilizar la fórmula de la probabilidad condicionada.

En la práctica realmente las probabilidades son condicionadas. Lo que pasa es que en este nivel, en curso de acceso, se pide principalmente la fórmula de Laplace, que es caso de probabilidad no condicionada y trabajando con los sucesos equiprobables. Hay que destacar un detalle, y es que no vamos a solicitar cálculo de probabilidades sobre espacios muestrales no equiprobables.

Bien, y entonces podemos pasar al tema 6. El tema 6 lo ha tocado poquito, así muy por encima. Nos habla de estadística. Sin embargo, la estadística está muy presente ahora mismo en nuestras vidas.

Parece que casi todo es estadística, en economía, en sociología, en el mundo de la televisión, de la publicidad, en fin, en casi todo, ¿no? Hombre, las previsiones se suelen hacer basándose en los estudios de tablas numéricas, las cuales se obtienen principalmente la media y desviaciones. Y entonces, claro, es un tema importante, porque cualquier previsión se hace en un margen muy cercano a la media. Sí, lo que ha dicho más que nada es que está muy cercano.

Bueno, lo que sí es cierto es que, según ya nos han dicho, no se va a incluir o probablemente no se incluya ningún problema en el examen final. Muy probablemente no. Probablemente no.

Es un tema que, como están en el examen, hay que tener en cuenta que son dos horas. Claro, es un tema extenso, pues siempre se busca de hacer unos temas como más importantes que les puedan valer luego para en el estudio de las carreras que los alumnos que se han matriculado en el curso de acceso en principio van a hacer, que son las carreras, pues ya saben, que son las de ciencias, ingenierías, etc. Bien, el tema 7 ya se ha dicho que es muy importante, pero algo que destacar.

Bueno, en el tema 7, en principio, bueno, está claro, es muy fácil que una pregunta de examen sea resolver un sistema de ecuaciones lineales. También deben preparar y a la hora de hacer el estudio tener en cuenta que pondremos un sistema que no sea muy grande, porque, claro, volvemos a lo de siempre, son dos horas. Eso sí pueden resolverlo por el método que quieran.

Entonces, hay gente que a lo mejor prefiere hacerlo por sustitución, otros prefieren por Gauss, como quieran. No se va a exigir ningún tema en concreto. En el caso de que se solicite resolver un sistema, basta que uno lo haga por el método que quiera, dado que la contestación será rellenar un test.

Entonces no podremos distinguir qué método está empleando. En el caso de que se solicite que se haga matricialmente, pues entonces no hay más remedio que hacerlo según el tema 9. Bien, entonces también otra recomendación, hacer todas las ecuaciones lineales que se pueda. Todos los sistemas.

Y todos los sistemas. Y el tema 8. Pues el tema 8, ya hemos dicho que es importante, porque trabajar con matrices da una nueva perspectiva a la hora de representar situaciones en el mundo científico. Pero como casi siempre estamos destacando sistemas que no son muy grandes, concretamente sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, yo recomiendo que se maneje con mucha sueltura la regla de Sarrus, para calcular determinantes de orden 3. Porque es poco probable que se pongan sistemas que tengan muchas ecuaciones y muchas incógnitas.

Pero es muy probable que caigan sistemas como mínimo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Sí, seguramente son tres o cuatro, como muchos, para que tengan que hacer el desarrollo para llegar al determinante por esta regla. Principalmente pensando en el tema siguiente de la regla de Cramer, el teorema de Rouché-Frobenius, es muy importante que se van a hacer los determinantes.

La regla de Cramer es una regla que se utiliza para hallar la solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, compatible. Y para la solución, cada una de las incógnitas se halla dividiendo dos determinantes. Entonces, está claro que el tema de determinantes para la solución de ecuaciones lineales es fundamental.

Y el tema 9, vamos a acabar ya este repaso con él. Ya lo he dicho, Teresa, que hay dos cosas importantes. Una que es el teorema de Rouché-Frobenius, que conlleva el conocer y dominar el concepto de rango de una matriz.

Y para ello, pues nuevamente hay que calcular determinantes. Y la regla de Cramer, que es el método eficaz que tenemos para resolver sistemas numerosos. Aquí tenemos que unir la parte teórica, es decir, conocer el concepto, y la parte práctica, que es saber aplicarlo.

Bueno, sí, teórico en cuanto hay que saber la regla, pero es práctico, porque es a base de hacer los determinantes y es una receta. Al fin y al cabo, es una cosa bastante mecánica, pero para hacer esa mecánica, claro, hace falta la receta, que es la teoría, y luego la práctica para poder

hacer los determinantes. Pues muchas gracias y muy buenas noches a todos.

Muchas gracias a vosotros, Isabel. Adiós a todos. Gracias, Isabel.

Despedimos la programación de La UNED hasta mañana. Les esperamos a partir de las 7 de la tarde. Seis en la comunidad canaria.

Que pasen una feliz noche.