

AC 15 20

Seguidamente, en matemáticas especiales se va a realizar una recapitulación de los conceptos explicados últimamente, según guión elaborado por el equipo docente de la asignatura. En la emisión de hoy no vamos a estudiar ningún concepto nuevo, únicamente vamos a repasar lo visto en los últimos programas radiofónicos, es decir, los elementos fundamentales del cálculo. Como es una emisión de repaso, intentaré que ustedes mismos vayan recordando estos conceptos.

Por ejemplo, supongamos que tenemos dos variables que están relacionadas entre sí, de forma que, al asignarle a una de ellas un valor, le corresponda a la otra un valor único, perfectamente determinado. ¿Qué podemos decir de estas dos variables? Podemos decir que ambas variables están relacionadas por una función. De acuerdo.

Diremos que la variable y es función de la variable x , en un conjunto que llamamos dominio de la función, si a cada valor de x de este conjunto le corresponde un valor bien determinado de y . Según creo recordar, a la variable x la llamábamos variable independiente y a la variable y variable dependiente. Exactamente. Una forma de tener perfectamente determinada la función era mediante su representación gráfica.

¿Cómo obteníamos la gráfica de una función? Dibujábamos dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto. A éste le llamábamos origen de coordenadas. En el eje horizontal tomamos los valores de x , es decir, de la variable independiente.

Le llamamos eje x o eje de abscisas. En el otro eje representamos los valores de las imágenes por f de los puntos x . Este es el eje y o eje de ordenadas. Tenemos de esta forma en el plano del papel una serie de puntos determinados por los pares x, f de x , cuyo trazado nos da la gráfica de la función.

Muy bien. Este breve repaso lo tienen esquematizado en el apartado 11 de la apoyatura escrita de este guión. Véanla un momento para fijar las ideas.

Pasemos ahora a recordar el concepto de límite de una función. Supongamos que tenemos una función f definida en cierto dominio de la recta real. Queremos ver si esta función tiene límite cuando x tiende a un cierto valor a , que en principio no tiene por qué pertenecer al dominio de definición de f . Es decir, f no tiene por qué estar definida en el punto a . Formulamos la pregunta con más claridad.

¿Qué tiene que cumplirse para que podamos decir que el límite de f es igual a b cuando x tiende hacia a ? Creo que la condición era la siguiente. Para cualquier entorno del punto b , por pequeño que lo cojamos, tiene que existir otro entorno del punto a tal que todos los valores de x que pertenezcan a dicho entorno de a tengan sus imágenes en el entorno tomado de b . Está bien, pero debe usted aclarar lo siguiente. En el entorno de a , no todos los puntos tienen por qué pertenecer al dominio de la función.

Es decir, que no todos los valores de x dentro del entorno de a tienen una imagen por f . Para más claridad, habría que decir para todo x perteneciente al entorno de a y al dominio de la función f . Veamos ahora si recuerdan lo que quiere decir que x pertenece al entorno de a . Supongamos que tenemos un entorno de a de radio r . ¿Cómo se expresaría que x pertenece a dicho entorno? Diremos que x pertenece al entorno de a de radio r cuando el valor absoluto de x menos a es menor que r . Aclaremos que la definición que usted ha dado nos dice que x pertenece al entorno abierto de centro a y radio r . ¿Cuál sería la diferencia en la definición si quisiéramos que x perteneciera al mismo entorno pero cerrado? En este caso el valor absoluto de x menos a tendría que ser menor o igual a r . Perfecto. En la figura 12 de la apoyatura tienen ustedes repetida la gráfica que veíamos en la emisión de límite para aclarar estos conceptos. Aunque en el dibujo a pertenece al dominio de f y f de x es igual a b , quiero recordar otra vez que esta condición no tiene por qué cumplirse.

Es decir, que a no tiene por qué pertenecer al dominio de f y si pertenece no tiene por qué cumplirse que f de a sea igual a b , aunque b sea el límite de f cuando x tienda hacia a . Existen otros dos casos de límites cuya definición se deriva de la que hemos dado. Uno de ellos es cuando tenemos una función que tiende a b cuando x tiende a infinito, es decir, que cuando la variable independiente se hace infinitamente grande la función tiende al valor b . El otro de los casos se produce cuando la función es la que se hace infinitamente grande al tender la variable x hacia a . No vamos a explicar con detalle estos dos casos que vienen expuestos en cualquier libro de texto de cálculo elemental. Únicamente en la apoyatura les hemos escrito la definición de cada uno de ellos.

Bien, veamos ahora si recuerdan el concepto de límite lateral visto en la emisión anterior. ¿Qué condición tiene que cumplirse para que una función f tienda hacia un número b cuando la variable x tiende hacia el número a por la derecha? Creo recordar que la condición era la misma que en el caso del límite, sólo que ahora los puntos del entorno de a que tienen su imagen en el entorno de b son únicamente los que están a la derecha de a . Exacto, es la definición normal del límite pero restringiéndonos al caso en que nos acercamos hacia a por la derecha, es decir, que la variable x tiende hacia a pero tomando siempre valores mayores que a . En el caso del límite por la izquierda nos acercamos hacia a pero tomando la variable x , únicamente valores más pequeños que a . ¿No es así? En efecto. Veamos ahora la siguiente cuestión.

Si tenemos una función f que tenga límites por la derecha y por la izquierda cuando x tiende al punto a , ¿tendrá esa función f límite cuando x tienda hacia a ? Creo recordar que en general no tiene límite. Solamente en el caso de que ambos límites sean iguales la función tendrá límite y su valor será igual al de los límites laterales. Perfectamente.

Veo que recuerdan muy bien la idea del límite lateral. En el apartado 14 de la apoyatura tienen ustedes un esquema de todo esto último. ¿Recuerdan ustedes cuál era la idea intuitiva de función continua en un cierto intervalo en relación con su gráfica? Creo que decíamos que una función era continua en un intervalo cuando para los puntos de ese intervalo la gráfica de la función se podría dibujar de una forma continuada, es decir, sin saltos, sin tener que levantar el

lápiz del papel.

Bien, aunque por supuesto esto no es una definición de lo que es la continuidad, nos puede servir para que ustedes vean mentalmente lo que quiere decir que una función sea continua. Veamos ahora de forma matemática las condiciones que debe cumplir una función f para que sea continua en un punto a . En primer lugar será necesario que la función esté definida en ese punto a . Dicho de otra forma que el punto a pertenezca al dominio de definición de la función f , o sea que exista f de a . Como segundo paso habría que comprobar que la función f tuviera límite cuando x tendiera hacia a . En último lugar comprobaríamos que el valor de ese límite y el de f de a fueran iguales. Exacto.

¿Cómo relacionamos el cumplimiento de estas tres condiciones con el hecho de que la función en el punto a no pegue un salto en su gráfica? Bueno, por la condición que dice que la función debe tener límite b cuando la variable tienda hacia el punto a . Sabemos que hay un entorno de puntos próximos al a en los cuales la gráfica no tiene saltos, ya que sus imágenes pertenecen al entorno de b . La dificultad surgirá en el mismo punto a . Aunque la función esté definida en a , es decir, exista f de a , esto no quiere decir que en el punto a no tengamos un salto, ya que puede ser que el valor del límite b hacia el cual tiende la función fuera distinto del f de a . Por eso, como tercera condición, decimos que los valores f de a y b tienen que ser iguales. Perfecto. Por descontado que si la función no está definida en a , no puede ser continua.

Por eso, esta es la primera condición. En el apartado 15 de la apoyatura tienen ustedes un esquema de lo que hemos visto sobre continuidad. Parece obvio decir que una función f es continua en un intervalo cuando es continua en cada punto de ese intervalo.

Supongamos ahora una función f que no esté definida en un cierto punto a de la recta real. Supongamos también que dicha función tiene límite cuando la variable x tiende a ese punto a y que este límite sea b . Evidentemente esta función no será continua en el punto x igual a a , ya que no está definida en este punto. ¿Qué ocurrirá si le asignamos a la función f en el punto a el valor del límite b ? En primer lugar, habremos conseguido que la función esté definida en dicho punto, ya que decimos que f de a es igual a b . En segundo lugar, como b es el valor del límite de f cuando x tiende hacia a , también conseguiremos la continuidad en a , ya que hemos asignado a f de a el valor del límite b . Cuando tenemos una función que en un punto x igual a a no está definida pero tiene límite, decimos que la función f tiene una discontinuidad evitable en el punto x igual a a . En el apartado 16 de la apoyatura tienen ustedes la expresión analítica de una función f que en el punto x igual a 2 tiene una discontinuidad de este tipo.

En efecto, para x igual a 2, f de x es una indeterminación, es decir, no está definida. Sin embargo, el límite de f cuando x tiende hacia 2 se puede demostrar que es 3. Entonces, sin más que asignar a f el valor 3, cuando x es igual a 2, tendremos la discontinuidad suprimida. Como no queremos introducir ningún concepto completamente nuevo, damos por terminada esta emisión.

En el próximo programa hablaremos del concepto de derivada. En matemáticas especiales se

ha realizado una recapitulación de los conceptos expuestos últimamente, según texto elaborado por el equipo docente de la asignatura. Aquí finaliza la emisión destinada al curso de acceso directo a la universidad para mayores de 25 años.

Con ello termina por hoy la programación radiofónica de la Universidad Nacional de Educación a Distancia por el tercer programa de Radio Nacional de España en la Península y Baleares, por el programa de Radio Nacional en Frecuencia Modulada en Canarias, por la Voz de Gerona en Frecuencia Modulada, por Radio Popular de Jerez en Frecuencia Modulada y por Radio Juventud de Calahorra en Onda Media.