

AC 15 11

Matemáticas especiales. El número real. Emisión número 15.

El tema que vamos a tratar hoy es el número real. Recordaremos primero lo que es una sucesión convergente de números racionales, según lo que vimos en la emisión anterior. Vamos a ver.

¿Sabrían ustedes explicarme esta noción? Una sucesión de números racionales es convergente cuando existe un número racional, que llamamos límite, tal que el valor absoluto de la diferencia entre este número y un término de la sucesión se puede hacer tan pequeño como queramos, sin más que tomar el término de la sucesión suficientemente avanzado. Ahora, en su enunciado falta un detalle que es importante. Cuando usted ha dicho convergente, debería haber añadido en el conjunto de los números racionales.

¿Por qué es importante especificar el conjunto en el cual es convergente? Verá. La razón es que hay sucesiones de números racionales que, no siendo convergentes en el conjunto de los números racionales, son convergentes, sin embargo, en otro conjunto de números, en el conjunto de los números reales. Vamos a estudiar ahora, en primer lugar, estas sucesiones.

Ah, estas sucesiones son las que en la última emisión llamábamos sucesiones de Cauchy. Efectivamente. Consideremos una sucesión de números racionales en la cual sus términos se van aproximando más unos a otros, según vamos avanzando en el orden de la sucesión.

Esta sería la noción de sucesión de Cauchy. ¿Puede poner un ejemplo? Vamos a construir una sucesión de números racionales a partir de la regla para extraer una raíz cuadrada. Mediante ella, vamos a ir obteniendo aproximaciones sucesivas a la raíz cuadrada de 2. Al empezar la operación, obtenemos en primer lugar el número racional 1. Al continuar el cálculo, obtenemos el decimal 4 décimas.

Con lo cual, el número racional que tenemos es 1 entero y 4 décimas. Reiterando el procedimiento, obtendríamos 1 entero 41 centésimas. 1 entero 414 milésimas, etcétera.

¿Estos términos formarían una sucesión? Creo que no, porque no se adivina cuál sería el término general. Sí, es una sucesión de números racionales. Es cierto que no tiene término general.

Sin embargo, la regla para calcular raíces cuadradas, aplicada en este caso al número 2, proporciona un criterio estricto que nos permite obtener cualquier término de esta sucesión. Admitimos, pues, que por el procedimiento anterior somos capaces de obtener cualquier término de la sucesión. Los primeros serían 1, 1 y 4 décimas, 1 y 41 centésimas, 1 y 414 milésimas.

Según lo dicho antes, ¿es ésta una sucesión de Cauchy? Yo creo que sí. Cuantos más decimales

vamos obteniendo en la operación, más próximos están unos términos de otros. Estoy de acuerdo.

Por ejemplo, la diferencia entre 1 y 41 centésimas y 1 y 4 décimas es del orden de una centésima. Pero la diferencia entre 1 y 414 milésimas y 1 y 41 centésimas es del orden de una milésima. Cuanto más vayamos avanzando en los términos de esta sucesión, obtendremos diferencias cada vez más pequeñas entre ellos.

Muy bien. El razonamiento que han seguido es esencial para reconocer las sucesiones de Cauchy. Ahora ya pueden comprender la definición no rigurosa que vamos a dar para estas sucesiones.

Admitiremos que una sucesión de números racionales es de Cauchy cuando las diferencias en valor absoluto de dos términos la podemos hacer tan pequeña como queramos, sin más que tomar estos dos términos suficientemente avanzados. Según la definición que ha dicho, las sucesiones convergentes en el conjunto de los números racionales pueden ser de Cauchy. En efecto, las sucesiones convergentes en el conjunto de los números racionales son sucesiones de Cauchy.

En el nivel intuitivo en que nos movemos, no es posible una demostración rigurosa de esta proposición. Sin embargo, observen que en las sucesiones convergentes, al ir aproximándose sus términos a un número racional que llamamos límite, lógicamente también se han de ir aproximando entre sí. Bien, yo tengo claro que las sucesiones convergentes son sucesiones de Cauchy.

Pero, ¿es verdad lo contrario? Es decir, ¿que una sucesión de Cauchy es siempre convergente? No, no, rotundamente no. Podemos ver esto con un contraejemplo. En la sucesión formada a partir del cálculo de la raíz cuadrada de 2, obteníamos una sucesión de Cauchy, pero que no tenía límite en el conjunto de los números racionales.

El que no todas las sucesiones de Cauchy sean convergentes, es decir, tengan límite racional, nos impulsa a buscar otros números no racionales que sean límites de estas sucesiones. Resolver este problema nos lleva a construir una ampliación del conjunto de los números racionales, el conjunto de los números reales. Vamos a construir el conjunto de los números reales siguiendo el mismo procedimiento que hemos utilizado para la definición de los conjuntos de números vistos hasta ahora.

Consideremos el conjunto de las sucesiones de números racionales que sean de Cauchy. Vamos a establecer en este conjunto una relación de equivalencia. Diremos que las sucesiones de Cauchy están relacionadas cuando la diferencia en valor absoluto de los términos del mismo orden de cada una de las sucesiones se puede hacer tan pequeño como queramos, sin más que eligiendo un orden suficientemente avanzado.

Yo creo que el método utilizado entonces para saber si dos sucesiones están o no relacionadas

es parecido al que utilizamos para ver si una sucesión era de Cauchy. Bueno, bueno, pero con una diferencia fundamental. En este caso comparamos términos del mismo orden de dos sucesiones diferentes y en las sucesiones de Cauchy comparábamos dos términos distintos de la misma sucesión.

Entonces, por lo que se ha dicho, entiendo que las sucesiones de Cauchy están relacionadas entre sí cuando se van aproximando todo lo que queramos una a la otra. En efecto, ésta es la idea. Ahora, dense cuenta que antes hemos dicho que la relación binaria definida en el conjunto de todas las sucesiones de números racionales de Cauchy era de equivalencia.

¿Qué nos sugiere esta afirmación? Bueno, habría que demostrar que se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. No demostraremos estas propiedades. Admitamos pues que efectivamente tenemos una relación de equivalencia en el conjunto de estas sucesiones de Cauchy.

¿Qué efecto produce esta relación de equivalencia en el conjunto de partida? Como toda relación de equivalencia definirá una clasificación y como consecuencia un conjunto cociente. No veo claro cuáles serían las clases de equivalencia en este caso. Como ocurre siempre, una clase de equivalencia está formada por todos los elementos del conjunto de partida equivalentes entre sí.

En nuestro caso particular, cada clase de equivalencia estará formada por todas las sucesiones de Cauchy que se aproximen entre sí en el sentido que antes dijimos. A cada una de estas clases de equivalencia la llamamos número real. Entonces, el conjunto cociente será el conjunto de los números reales.

Así es. El conjunto cociente de las sucesiones de Cauchy respecto a nuestra relación de equivalencia es el formado por todas las clases de equivalencia. Como cada clase de equivalencia la hemos llamado número real, al construir este conjunto cociente estamos definiendo el conjunto de los números reales.

Para terminar, vamos a hablar muy brevemente de la estructura algebraica del conjunto de los números reales. Para ello supondremos definidas las leyes de composición interna, suma y producto. Tengan ustedes en cuenta que el número real surge de la necesidad de resolver determinados tipos de problemas que no tenían solución en el conjunto de los números racionales.

Por tanto, la estructura algebraica de los números reales ha de tener todas las propiedades que tenía la de los números racionales. Biberio, por favor, ¿puede decirnos alguno de los problemas algebraicos que no se podían resolver con los números racionales? Por supuesto. Hay una ecuación muy sencilla que no tiene solución racional.

Es la ecuación x elevado al cuadrado igual a 2. La solución de esta ecuación sería raíz de 2, ¿no? Exacto. Pero raíz de 2 no es un número racional, es un número real. Recuerden ustedes las

sucesiones de Cauchy que obteníamos al empezar la emisión mediante sucesivas aproximaciones racionales a partir de la regla de extracciones de las raíces cuadradas.

Decíamos también que esta sucesión no era convergente en el conjunto de los números racionales, lo que equivale a decir que no existe la raíz de 2 como número racional. La ecuación x al cuadrado igual a 2 no tiene, pues, solución racional. Está bastante claro que con los números reales podemos dar solución a problemas algebraicos nuevos.

Usted ha dicho también que la estructura algebraica de los números reales tiene, al menos, las propiedades de la estructura de los números racionales. ¿Pero tiene alguna propiedad nueva? No, no. La estructura algebraica de los números reales es como la de los números racionales.

Es la de cuerpo conmutativo. Veremos en una próxima emisión que existen problemas algebraicos que no tienen solución en el cuerpo de los números reales. Por esta razón será necesario ampliar el conjunto de los números reales mediante la introducción del número complejo.