

... Por último, hoy en el tiempo del CAD, del curso de acceso a la universidad para mayores de 25 años, contamos con el profesor Eduardo Ramos para hablar sobre números reales y geometría analítica, temas de la asignatura Matemáticas Básicas. Profesor Eduardo Ramos, buenas noches y bienvenido. Muy buenas noches, Edith. Un saludo muy cordial a todos nuestros alumnos del curso de acceso de Matemáticas Básicas. Las magnitudes físicas, como el tiempo, la distancia o el peso, se miden en la práctica mediante los números racionales que ya vimos en el otro capítulo, en el capítulo 2. Parece que los números racionales deben permitir expresar con exactitud cualquier magnitud, pero ya los matemáticos griegos descubrieron que eran insuficientes.

para tomar medida de ciertas longitudes. Este sistema ampliado de números los llamamos reales. ¿Qué son los números reales? Sí, muy bien. Hoy nos toca comentar el capítulo 4, la lección 4, que completa este primer bloque de lecciones destinada a estudiar los conjuntos de números que el hombre ha inventado para solucionar, como hemos dicho en otras ocasiones, sus problemas de cálculo. Hemos estudiado los números naturales, los números enteros, hemos estudiado también los números fraccionarios y parece que ya habíamos conseguido resolver todos nuestros problemas de cálculo, pero no es así. No es así. Como veremos a lo largo de este capítulo y en alguna ocasión comentamos ya también en otros capítulos anteriores, todavía hay problemas de cómputo, ecuaciones que no damos resuelto. Vamos a imaginar un sencillo ejemplo. Supongamos que, por cierto, era ya conocido por los griegos. Supongamos un campo de forma contraria, cuadrada, y supongamos que...

tenemos un lado de ese cuadrado pues es un metro o un kilómetro pero bueno por sentar un poco mejor las ideas supongamos que es un metro bueno si queremos medir la diagonal de ese campo la diagonal de ese campo con ese metro que es el lado bueno empezamos a medir y vemos que mide pues 11 metros un poco más de un metro y acudimos a las fracciones del metro a los números que conocemos hasta ahora o los números fraccionarios vemos que podemos sacar 4 decímetros o sea cuatro décimas de metro una fracción del metro hacemos un aumento como si lo mirásemos con una lupa y vemos que todavía no nos llega el 1,4 para medir esa diagonal entonces acudimos a los siguientes fracciones del metro los centímetros las centésimas de metro vemos que nos cabe todavía un metro

volvemos a hacer zoom como si lo hubiéramos ahora con estas máquinas o unas lentes de ampliación, vemos que todavía tenemos ahora 1,41, o un número decimal, un número fraccionario, de los que conocemos del capítulo anterior, todavía no nos llega, todavía hay un trocito, y vemos que por más que añadamos décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, de la unidad de medida del metro, no conseguimos encajar exactamente con esas fracciones de la unidad de medida, la longitud de la diagonal del cuadrado. Este hecho, que como he dicho hace un momento, era ya conocido por los griegos, dejó a estos muy preocupados, acuñaron esa frase tan aparatosa, la diagonal del cuadrado es inconmensurable con su lado, no se puede acudir a la unidad de medida del metro, no se puede acudir a la unidad de medida del metro, no se puede medir con el lado. Y se dieron cuenta que con los números fraccionarios que teníamos, que conocemos hasta ahora,

no nos llega. Tiene que haber otros números más allá de los fraccionarios que puedan servir para solucionar esos problemas de medida que tiene el hombre, como puede ser medir la diagonal de un cuadrado con una unidad como su metro. Estos números que no se podían expresar como fracciones, que no se podían expresar como razones, se llamaron, los griegos ya lo llamaron, irracionales. Quizás jugando un poco, se me ocurre la pequeña broma de la palabra de que, aunque significan la etimología de que no tienen forma de razón, quizás que son un poco fuera de la razón. Bueno, una vez constatado este hecho de que existen otros números que solucionan problemas de medida, problemas de cómputo, como este que acabo de comentar, pues ya podemos acabar de completar los conjuntos de números. No tiene que darnos mayor problema con él. No tiene que darnos mayor problema. Simplemente, este número, como el que acabo de citar, que es un número muy conocido y es uno de los...

primeros números irracionales que tenemos, se representa luego gráficamente con una simbología, igual que representamos al 2 como una especie de patito, pues este número que representa lo que mide la diagonal de un cuadrado cuando se mide con su lado, se representa con ese patito con una V y una rayita encima, un signo de radical. Es una grafía para significar la representación de ese número y se le llama número raíz de 2, igual que al otro se le llamaba 2, 3 o 10, a este se le llama raíz de 2. En su nombre, sabiendo lo que significa, podremos trabajar con él con toda la tranquilidad. De estos números hay varios, los más tópicos y característicos son los que son raíces, los que representan raíces de números que no dan exacto, como este es raíz de 2. Pero también hay otros números famosos, como el número pi, el número pi que es el cociente de lo que mide la longitud de una circunferencia, que es el

número de la longitud de una circunferencia, que es el número de la longitud de una circunferencia, cuando se divide por su diámetro. Entonces, cuando se mide la longitud de una circunferencia,

longitud de una circunferencia con el diámetro nos sale también un número de estos que no se puede expresar como fracciones que es el famoso número π que luego se dice tiene una aproximación decimal 3 14 15 92 pero eso no quiere decir que ese sea el número π el número π es un número que tiene una expresión decimal con infinitas cifras decimales esto desde el punto de vista conceptual no nos tiene que causar mayor problema y una vez entendido cómo se montan los números reales racionales y racionales los completamos con los que conocíamos hasta ahora los racionales y esos dos conjuntos de números en una síntesis en un conjunto nuevo se denomina el conjunto de los números reales que es el objeto del estudio de la lección cuando y con esos números reales se puede hacer todo lo que hemos hecho prácticamente los números que conocemos hasta ahora bueno y cómo se ordenan esos números reales y cómo se puede operar con ellos efectivamente se operan como los demás con su número real y con su número real se puede operar con sus números reales y con sus números reales se puede operar con sus números reales y operan con sus símbolos

cundo se dejan indicados cuando son indicados, si se necesita una aproximación de ellos para trabajar en la realidad con ellos, se puede hacer aproximaciones decimales, un número finito de cifras, etc. Sobre este tema volveremos luego en el capítulo 12, para ver con los errores que se cometen, etc. Pero desde luego, desde el punto de vista conceptual, no hay nada nuevo. Se trabaja con aproximaciones de ellos, y se trabaja con estos números como otros números cualesquiera. Y luego también hay una idea muy importante en el conjunto de números reales. Suele representarse este conjunto en forma de recta. En esa recta se marca un punto que es, arbitrariamente, el cero, el origen. Hacia la derecha se suelen representar los positivos, hacia la izquierda los negativos, y cada número representa la distancia, cada número real representa la distancia a ese origen. Y esa misma idea de recta nos da la imagen intuitiva de lo que es una propiedad de los números reales, que es que están ordenados. Es decir, dado el...

dos números reales cualesquiera, siempre se puede decidir quién es mayor que el otro, o si son iguales. Es decir, por ejemplo, igual que sabíamos que el 1 era menor que el 2, pues sabemos, por ejemplo, que raíz de 2 es más pequeño que π , es menor que π , o que π es mayor que raíz de 2. Entonces, esa es propiedad de la ordenación de los números reales, es una propiedad muy típica, muy característica de los números reales, y sobre esa propiedad de la ordenación hay una serie de resultados que están ahí en la pregunta 4.2.2 sobre las propiedades de las desigualdades que tenemos que conocer muy bien. Bueno, pues una vez explicado qué son los números reales y cómo se puede operar con ellos, pasamos, si le parece, a hablar de potencias y raíces. Sí, como he dicho también en otras sesiones en este curso, uno de los objetivos de este curso de matemáticas es hacer cálculos un poquito más avanzados, más allá de las cuatro operaciones básicas. Y aquí tenemos un ejemplo característico. Las potencias y la raíz. Las raíces no son más que cálculos un poco más sintéticos.

caracterizados, coordinados, etc. Ahí, bueno, lo que es una potencia es bien sencillo, repetir por factor un número que se llama base, o un número otado, llamado exponente, las raíces es la operación inversa, y luego tenemos una serie de propiedades sobre estas operaciones de potenciación e irradiación, que son bastante intuitivas, bastante sencillas, y que recomiendo que se trabajen sobre ellas con varios ejemplos que en este capítulo y en este párrafo en concreto hay muchos en el libro. En la unidad didáctica. Al añadir, profesor Ramos, los números irracionales a los racionales, muchas ecuaciones pasan a tener solución dentro del conjunto de los números reales. ¿Están entre ellas las ecuaciones de segundo grado? Sí, en esta misma línea de hacer cálculos más complejos, ahora podemos solucionar un problema que en la lección anterior de ecuaciones no podíamos solucionar, que era resolver una ecuación, por ejemplo, del tipo x cuadrado igual a un número a , por ejemplo, al 2. x cuadrado, buscar un número x cuyo cuadrado sea 2 en el conjunto de los números fraccionados.

como acabo de comentar al principio, no tenía solución. Ahora sí, ahora sabemos que existe un número real que se llama raíz de 2, tal que su cuadrado da precisamente 2. Bueno, pues esta es una de las ecuaciones básicas, el ejemplo más elemental de unas ecuaciones que se llaman ecuaciones de segundo grado, que tienen la forma general esa de ax cuadrado más bx más c igual a cero, donde a , b y c son números reales. El estudio de esta ecuación también es muy interesante porque se pueden encontrar sus soluciones, que como ya dijimos en el capítulo anterior, resolver una ecuación es encontrar sus soluciones de una forma explícita. Y ahí hay un número que es el b cuadrado menos $4ac$, que es el que decide cuántas soluciones tiene esta ecuación, si tiene 2, si tiene 1, o si no tiene ninguna solución en el conjunto de los números reales. Bueno, esta es una pregunta. También... Bueno, esta es una pregunta también. También muy importante que hay que trabajar bien, conocer bien cómo es la ecuación de

segundo grado...

sus soluciones, cómo son la suma de sus soluciones, etcétera. Todo ese tipo de cosas son también las preguntas características de los ejercicios sobre esta lección. En este capítulo, profesor Ramos, se habla también de exponenciales y logaritmos y de aplicación a cálculos financieros. Sin embargo, estos apartados no son materia de examen. ¿Es conveniente el repaso de los mismos como ampliación o por el momento se pueden dejar un poco apartados? Sí, bueno, como hemos también dicho en varias ocasiones, el libro siempre ha tenido un objetivo un poco más amplio que el curso, completando algunos aspectos más aplicados a las matemáticas y creo que este, en concreto el punto 4.6, es una de las herramientas más que al hombre de la calle hoy le resultaría más útil. Es eso de calcular lo que nos cobran por las hipotecas y los intereses de cosas. Lo que pasa es que, como somos conscientes de que la dificultad, digamos, matemática es un poquito más elevada de lo que se supone en un curso de introductorio de matemáticas, pues, tenemos esa idea de que no es un objeto de examen. Nuestra recomendación siempre es que,

que se lea, que se trabajen, pero bueno, el que le cause algunas dificultades pues lo puede dejar en la seguridad de que nada de lo que ponen esas preguntas será materia de examen. Bueno, pues pasamos a comentar a continuación el capítulo quinto, la geometría analítica. La geometría es una de las actividades matemáticas más antiguas, sin embargo, durante siglos se estudiaba como una disciplina con pocas relaciones con otras ramas de las matemáticas. Fue Descartes, en el siglo XVII, quien introdujo la sistemática de los números en el quehacer geométrico. Fue en su discurso sobre el método donde propuso utilizar un sistema de referencia que en su honor se ha llamado cartesiano. ¿Cómo es el sistema de referencia cartesiano? Muy bien, efectivamente, una de las actividades matemáticas más características, además de hablar de números, como hemos hecho en las lecciones 1, 2, 3 y 4, es hablar de figuras, hablar de rectas, hablar de circunferencias, hablar de esferas, hablar de prismas, de pirámides, es decir, hablar de...

de la medida de la Tierra, de los objetos que existen sobre la Tierra. Y eso es, como acabas de decir muy bien, el significado etimológico de la palabra geometría. También es una de las, repito, actividades más características de la matemática y en este curso introductorio es interesante tener una lección muy somera, lo más elemental posible, de geometría. Como acabas también de recordarnos, efectivamente, la geometría, lo que estudiamos en este capítulo de geometría es la geometría cartesiana. Esto es una idea que, en mi opinión, es uno de los momentos brillantes de la historia del pensamiento filosófico, de la historia del pensamiento matemático, con René Descartes, que, como es conocido, era un filósofo matemático muy notable, que tuvo la visión, que hoy nos parece muy intuitiva, muy superficial, muy fácil de manejar. Dejamos en estos cursos introductorios e incluso en los cursos de bachillerato

de identificar el plano, de identificar los objetos geométricos, por decirlo así, con los objetos algebraicos. O sea, como vamos a ver a lo largo de este capítulo, de identificar, de ver que retas, planos, ideas típicamente geométricas eran la otra cara de una moneda, como eran ecuaciones incógnitas, sumas, restas y cosas así, que eran el objeto de estudio de los capítulos anteriores. Entonces, digo que esto nos parece una cosa muy sencilla, pero hay que ver la cantidad de tiempo que tuvo que pasar en la historia hasta que el hombre cayó en la cuenta. Entonces, mi pregunta es qué es un sistema cartesiano. Esta es una de las ideas claves de René Descartes. Un sistema cartesiano es una idea bastante sencilla. Se toma un punto en el plano, que se llama como origen, se toma dos rectas que se corten en ese punto, perpendicular. Y se corta en dos rectas, que son los dos centímetros, que son los dos centímetros, que son los dos centímetros, para más sencillez.

que se llaman ejes coordenados, y sobre cada una de esas rectas se marcan, arbitrariamente, en el lugar que uno le parezca, dos puntos determinados que sirven de unidad de medida relativa al origen. Como habíamos hablado antes de la línea recta, de los números reales, pues se marcan en uno de los ejes, en uno de esos ejes coordenados, una distancia, que se toma como unidad de ese eje, y en el otro, otra distancia, otro punto, se toma como unidad de ese eje. Con estas herramientas, con estos tres elementos tan sencillos, tenemos una manera de identificar un punto del plano, un punto cualquiera, con un par de números reales, con un par de números reales, x y y . Para ello no hay más que proyectar, hacer caer sobre cada uno de los ejes coordenados, el punto, eso es donde estamos, y medir la distancia en la que corta esa proyección a cada uno de los ejes coordenados. Medir esa distancia en unidades de medida, de las que hemos definido, y nos dan dos números reales. Entonces, de esta manera, un concepto típicamente geométrico,

como es la idea de punto, que es una idea geométrica, se convierte en un objeto típicamente algebraico

como es un par de números reales, x y y , y podemos identificar al punto P con su par de números reales x y y que reciben ahora el nombre de coordenada de abscisa del punto, coordenada x , coordenada y . Al eje x se le llama eje de abscisa y al eje y se le llama eje de ordenadas, una terminología también estándar. Y esto, insisto, que parece una idea muy simple y que ahora somos bastante familiares con ella porque está lleno, tenemos muchos ejemplos de sistemas de referencia de este estilo, en fin, familiar, pues creo que fue una idea que a la humanidad le costó mucho encontrarla y desde ese momento las cosas se simplificaron bastante, se simplificaron bastante como vamos a ver ahora a lo largo de esta lección. Efectivamente, porque parece sencillo imaginarse que una pareja de puntos es la configuración más sencilla, pero ¿cómo se puede? ¿Cómo se puede medir la distancia entre sus extremos? Ahí tenemos, ves, en este momento, antes habría que medir con una, digamos, con un...

una recta con unas varas de medir con unos metros con unos hilos pues muy bien desde que tenemos un sistema cartesiano hay unas ideas estas de tipo geométrico como venir distancias que se convierten en unas ideas de tipo algebraico como hacer unas operaciones como hacemos para ello pues dada las coordenadas de los dos puntos llamamos p y p' y sus coordenadas son x y x' una sencilla fórmula como pueden ser la calcular la raíz cuadrada de esta operación x' menos x al cuadrado más y' menos y al cuadrado nos da la distancia de la distancia no da el valor numérico de la distancia en todos los puntos insisto la idea hemos cambiado un problema geométrico de coger una recta una vara de medir o un hilo en un problema algebraico de hacer una operación que es una potencia y una erradicación correcto entonces estas ideas bien son las fórmulas de la distancia en todos los puntos que estará llena ahora veremos otra

la lección de este tipo de cosas. Otro de los conceptos que parece muy abstracto y por tanto difícil de definir es el de recta en el plano. ¿Hay algún recurso para su representación? Intuitivamente todo el mundo creo que tiene la noción de recta. La verdad es una tautología decir que la recta es una selección de puntos en la misma dirección o algo así. Bien, lo que importa que conozcamos en esta lección es la traducción algebraica de la idea geométrica de recta. Y la traducción algebraica consiste en una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Una ecuación como la ecuación $ax + by + c = 0$. El conjunto de los puntos x y y del plano, cuyas coordenadas satisfacen esa ecuación, están en línea recta. Esa es también nuestra idea muy interesante. El ver cómo una idea geométrica de recta se ha traducido en una idea conocida ya. La idea de ecuación de primer grado con dos incógnitas. Hemos tenido también ya la habilidad de traducirla. Transformar ideas geométricas.

en ideas geométricas. Esta ecuación hay que conocerla bien en todas sus formas. Esta es la forma general de la recta, luego podemos tener la forma explícita, en donde aparece la pendiente de la recta y el corte como el eje de ordenadas, la forma $y = mx + b$, en fin, se puede pasar de una a otra tranquilamente y uno de los objetivos de este párrafo y de este punto es que los alumnos se familiaricen bien con la ecuación y sepan identificar bien lo que es la pendiente, lo que es la ordenada del origen, etcétera, este tipo de cosas. Dados dos puntos de coordenadas con una única recta que pasa por ambas, ¿cuál sería la ecuación de dicha recta? Sí, también es otra de las preguntas típicas de esta lección. Dados dos puntos con sus coordenadas x_1 y y_1 y x_2 y y_2 , es una operación algebraica sencilla encontrar la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos. Voy a remitirme ahí. Pregunta como en la siguiente a los puntos 5, 6 y...

5-7 del libro que merece la pena trabajar un par de ejemplos. Sí, porque parece evidente que dos rectas no paralelas deben cortarse en un punto, pero ¿cómo puede determinarse esto desde un punto de vista analítico? Una vez más, a riesgo de repetirme y de parecer reiterativo, volvemos a encontrar aquí la misma idea. ¿Cómo encontrar el punto donde se cortan dos rectas, que es otro problema típicamente geométrico? Pues eso se puede traducir al lenguaje algebraico en cómo resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cosa que sabemos hacer ya. Entonces, cuando ese sistema tiene solución, el punto X barra y barro o X' y y' de coordenadas de solución da la intersección de las dos rectas. Y ya, para finalizar esta lección, podemos remitirnos, tengo que recordar, mejor dicho, a que hay dos conceptos también gráficos intuitivamente muy sencillos como son los de rectas paralelas, las vías del tren y las rectas. Las perpendiculares, las que se cortan

en ángulo recto, que se puede identificar muy fácilmente mediante las condiciones que tienen que verificar sus pendientes y sus ecuaciones. Y con esto, y estos son también, en estos resúmenes que hacemos del libro, preguntas muy características del examen. Bien, pues hemos hablado de números reales y geometría analítica, temas de la asignatura Matemáticas Básicas del CAD, curso de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Eduardo Ramos, muchísimas gracias y buenas noches. Muchas gracias y de nuevo un saludo muy cordial a todos nuestros alumnos del curso de acceso. Pues esto ha

sido por hoy en el tiempo de la UNED, la Universidad Nacional de Educación a Distancia. Volvemos el próximo sábado a la... A las siete de la tarde. Les esperamos que pasen una feliz semana.

Loving Driving the whistling skies Risky, that's your name Risky, all the shame Risky, show me your style
Risky, love's on top

Tú me haces sentir que este corazón es real Cuando me agarras, me amas Oh, me amas