

... Matemáticas básicas. Título, conjunto cociente. Guión número 8. Fecha de emisión, 29 de noviembre de 1980. 26 de noviembre de 1980. En la emisión de hoy vamos a introducir la idea de conjunto cociente. Este concepto está íntimamente conectado con las relaciones de equivalencia. Empezaremos, pues, con un breve repaso de lo visto en la emisión anterior en que hablábamos de este tipo de relaciones binarias.

En primer lugar, como acabo de decir, las relaciones de equivalencia son un tipo especial de relaciones binarias. Recuerdo que, en efecto, dijimos el otro día que toda relación de equivalencia es una relación binaria y que, en general, lo recíproco no es cierto. Muy bien. En segundo lugar, señalamos el efecto que una relación de equivalencia tiene sobre el conjunto de partida, en el cual está definida. ¿Recuerdan ustedes algo sobre esto? Creo que decíamos que una relación de equivalencia nos introduce cierta clasificación en el conjunto en el que está definida. Efectivamente. Si en un conjunto cualquiera A tenemos definida una relación de equivalencia, esta nos clasifica los elementos del conjunto. Esta clasificación se efectúa agrupando los elementos del conjunto.

a que estén relacionados entre sí en diferentes subconjuntos. Para que esta clasificación fuera correcta, todos los elementos del conjunto tenían que estar afectados de alguna forma por la relación, ¿no es así? Exacto. Precisamente esta era otra de las características que debía cumplir una relación de equivalencia. Como ustedes recordarán de la emisión anterior, las relaciones binarias en general no tenían por qué afectar a todos los elementos del conjunto en el cual estaban definidas. Sin embargo, si tenemos definida una relación de equivalencia en un conjunto dado, todos los elementos de éste estarán, al menos, relacionados consigo mismos. Esta es la propiedad que llamábamos reflexiva. Repitamos ahora un ejemplo de los vistos en la emisión anterior. Música

Supongamos que tenemos el conjunto formado por todas las localidades de un cine. En este conjunto definimos la relación de equivalencia siguiente. Dos localidades estarán relacionadas si tienen el mismo precio. ¿Cuál será la clasificación en este conjunto por medio de esta relación? Yo creo que se formarán subconjuntos de localidades, en los cuales agruparemos a las que tengan el mismo precio. Por ejemplo, si el cine tiene tres tipos de precios distintos, butacas, entre suelo y principal, estos serán los subconjuntos de localidades por efecto de la relación de equivalencia. Muy bien. A estos subconjuntos producidos por la relación en el conjunto de partida los llamaremos clases de equivalencia. Cada uno de ellos tendrá su propio precio.

uno de estos subconjuntos será así una clase de equivalencia distinta. Es decir, que en este ejemplo las clases de equivalencia serán tres. El subconjunto de todas las butacas, el subconjunto de todas las localidades de entresuelo y el subconjunto de todas las localidades de principal. Correcto. Pues bien, podemos decir ya que el conjunto cociente es el formado por todas las clases de equivalencia. Piensen brevemente en esta definición. Según esto, los elementos del conjunto cociente son de distinto tipo que los del conjunto de partida en el cual definimos la relación. ¿Ven ustedes esto? Yo sí lo entiendo. Yo lo entiendo.

Los elementos del conjunto cociente son las clases de equivalencia que a su vez son conjuntos. Yo también lo veo. Siguiendo con el ejemplo anterior, los elementos del conjunto de partida son localidades, mientras que los elementos del conjunto cociente son tres. El subconjunto de las butacas, el de los asientos de entresuelo y el de los asientos de principal. En un caso los elementos son simples localidades y en el otro los elementos son conjuntos de localidades. Muy bien, veo que está entendido. Vamos a poner otro ejemplo en el que podamos ver otra vez estas ideas. Consideremos el conjunto formado por todos los autobuses públicos de una ciudad determinada. Estos autobuses estarán repartidos en diferentes líneas que recorrerán toda la ciudad. Definamos ahora la relación de equivalencia siguiente.

autobuses cualesquiera estarán relacionados entre sí si recorren la misma línea. ¿Podrían decirme cuál es el conjunto cociente que esta relación define en el conjunto de partida de todos los autobuses? Como hemos dicho antes, el conjunto cociente estará formado por las distintas clases de equivalencia. Las clases de equivalencia son subconjuntos del conjunto de partida en las cuales agrupamos a los elementos relacionados entre sí. En este caso, cada clase de equivalencia estará formada por los autobuses que recorren una misma línea. Supongamos que hay una línea en la ciudad recorrida por un solo autobús. ¿Estaría este elemento también clasificado? Yo creo que sí, ya que si no, la clasificación no sería completa. Es lógico, pero ¿a qué clase de equivalencia pertenecería este elemento? En ese caso, la clase de equivalencia

a la que pertenecería este autobús tendría un solo elemento, el mismo. Ya que, como hemos dicho, en

una relación de equivalencia, todos los elementos tienen que estar relacionados consigo mismos. O sea, la clase de equivalencia a la que pertenecería este elemento sería un conjunto unitario. En efecto. Esto es lo que me interesaba que entendieran. Una propiedad importante de las clases de equivalencia es que, para una relación dada, no puede haber un elemento que pertenezca a dos clases distintas. Esto parece lógico. No podemos tener un autobús que recorra dos líneas a la vez, o en el ejemplo anterior, una misma localidad con dos precios distintos. Entonces las clases de equivalencia son subconjuntos distintos entre sí. O sea, no tienen ningún elemento común. Esta es la forma correcta de decirlo. Como hemos afirmado antes, esta es una

propiedad que deben cumplir las clases de equivalencia si están bien construidas. Es lógico también afirmar que dado un conjunto cualquiera se pueden definir sobre él más de una relación de equivalencia. Esto equivale a decir que los elementos de un conjunto se pueden clasificar de distintas formas. Cada relación de equivalencia que definamos nos dará un conjunto cociente distinto. Se me ocurre, por ejemplo, que en el conjunto de los autobuses, y suponiendo que tuvieran distinto número de plazas, se podría definir la relación siguiente. Dos autobuses están relacionados si tienen las mismas plazas. En el caso que acabamos de oír, las clases de equivalencia estarán formadas por autobuses con igual número de plazas. Esto nos dará una clasificación distinta de la anterior. Muy bien. Veo que tienen ustedes las ideas básicas. ¿Qué es lo que se puede hacer con las clases de equivalencia? ¿Qué es lo que se puede hacer con las clases de equivalencia? Bastante claras. Para terminar, vamos a ver cómo se puede hacer con las clases de equivalencia.

Vamos a resumir lo que hemos dicho. Supongamos que tenemos un conjunto cualquiera A y que sobre él hemos definido una relación binaria de equivalencia R . El conjunto cociente definido en el conjunto A por la relación R estará formado a su vez por una serie de subconjuntos de A que llamaremos clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia agrupará a los elementos de A que están relacionados entre sí por la relación binaria de equivalencia R . ¿Qué es equivalencia? Estas clases serán disjuntas.

juntas entre sí, y la unión de todas ellas nos dará el conjunto de partida A . Como siempre, les recomendamos que repasen todo esto detenidamente en su libro de texto. Gracias por ver el video.