

AC 15 38

¿No creéis que debería hacer otra? Con la profesora Paloma Pantoja-Abeloki abordaremos el contenido de la quinta unidad didáctica. Estamos, como siempre, de lunes a viernes entre once y once y media de la noche aproximadamente, una hora menos, en la comunidad autónoma canaria, en Radio Nacional de España Radio 3 en frecuencia modulada y emisoras de la red de Radio Cadena Española. Pero entonces el contenido de la quinta unidad didáctica de matemáticas especiales.

¿Qué temas se tratan en esta unidad didáctica? Tienen los temas de límites, funciones continuas, funciones derivables y aplicaciones de las derivadas. Quería decir, en primer lugar, que esta unidad es muy importante y el alumno le debe dedicar bastante atención a ella. Es una unidad eminentemente práctica, aunque tiene algunos conceptos quizá un poco difíciles para el alumno, pero que debe intentar comprender lo mejor posible para luego poder realizar bien los ejercicios.

Empezando con el primer tema, que es el de límites, los alumnos ya conocen las funciones reales de variable real. Ya han estudiado en la primera unidad didáctica las aplicaciones y dentro de ellas unas aplicaciones particulares numéricas a las que llamábamos funciones. Pues bien, ahora vamos a tratar de funciones reales de variable real.

Tendrán que comprender bien los conceptos de intervalo abierto, cerrado, entorno y entorno reducido. Es muy importante que comprendan el concepto de entorno reducido, que en realidad es el mismo que el de entorno, solo que no interviene, no comprende el punto A , el centro del entorno. Son conceptos de partida importantes entonces el de entorno y el de entorno reducido.

Y si ya vemos el concepto de límite, este es un concepto que al principio suele plantear dificultades a los alumnos y quizá al principio no lo entiendan bien. ¿Qué es un límite? Tenemos una primera definición de límite utilizando entornos. Diremos que una función F tiene de límite un número real L cuando X tiende a A si para cada entorno de ese límite existe un entorno de A , de manera que para cada valor o número real comprendido dentro del entorno reducido de A , la imagen de ese número está comprendido en el entorno de L . Quizá así dicho por radio no van a entender muy bien esta idea pero en el libro la pueden mirar y verán que no es tan difícil de entender.

En la página 124 tienen una figura que les puede ayudar a comprender este concepto. Como ven, tenemos el punto A y el punto L y a partir de A tomamos un entorno. Siempre que tomamos un entorno lo que hacemos es elegir un radio y tenemos realmente un intervalo abierto de extremos A menos δ y A más δ .

También tenemos en L un entorno de L de tal manera que tenemos los puntos de extremos, sería el entorno abierto L menos ϵ , L más ϵ . De tal manera que lo que nos dice la

definición de límite es lo siguiente, que para cada entorno que elijamos de L tendrá que existir un entorno de A de manera que las imágenes de los elementos de ese entorno deben estar contenidas en el entorno de L . O sea que entonces es básico para entender el concepto de límite dar dos puntos L y A y sus respectivos entornos. El entorno de A , A más delta, A menos delta.

El entorno de L , L más epsilon, L menos epsilon. Gráficamente esto se ve muy bien en el libro. Si el alumno puede con lápiz comprobar que cada vez que elijamos en este caso un entorno para L , sea más grande o más pequeño, siempre va a existir un entorno de A que cumple esas condiciones.

Entonces por eso diremos que esta función tiene límite L cuando X tiende a A . No siempre una función tiene límite, pero si tiene es único. Es decir, que si nosotros ahora tomáramos en lugar de L otro valor, por ejemplo, imaginemos que tomamos L más epsilon como valor del posible límite, veríamos que no cumple las condiciones y al elegir un entorno de este L más epsilon, que lo pueden hacer con lápiz, no va a existir siempre un entorno de A de manera que los elementos de ese entorno de A estén contenidos dentro del entorno de L más epsilon. Es decir, que el límite de una función en un punto si existe es único.

Esta es una cuestión importante que el alumno no debe olvidar. Es decir, si existe límite, el límite es único. ¿Y es obligatorio que si existe límite en un punto esté definida la función en ese punto? En el caso que nos ocupa, vuelvo a decir que estamos en la página 124, puede no estar definido ese F de A . Es decir, que aunque el límite L , en este caso, sería el que correspondería a F de A , puede ocurrir que esta función esté definida en todos los puntos excepto en A . Eso no importa, puesto que nosotros en la definición de límite lo que exigimos es que todo número real perteneciente al entorno reducido de A cumpla la condición que hemos dicho antes, pero como es reducido, A no lo incluimos.

Este también es un resultado que no deben olvidar. Es decir, puede haber límite y no estar definida la función en ese punto. Bueno, la definición que has explicado del límite parece bastante clara, pero ¿hay otras definiciones sobre lo que es el límite? En el libro también viene otra definición a partir de los radios de los entornos, pero creo que como por radios se dice bastante mal y lo van a entender poco, creo que lo vamos y el alumno puede mirarlo en el libro.

Bueno, el concepto del límite es fundamental y muy importante y hay que entenderlo bien, puesto que es el centro de toda esta unidad. Además, porque luego se estudia en los temas de continuidad y derivadas. Se vuelve a utilizar el concepto del límite.

Pasando ya al tema concretamente de límites, porque lo importante de estos temas es desde luego hacer muchos ejercicios prácticos de límites. Ya hemos visto el límite de una función en un punto. También se definen los límites laterales, límite a la derecha y límite a la izquierda de un punto, que pueden encontrar la definición en el libro.

Si estos límites laterales no coinciden, no existe límite de la función en el punto. En bastantes ocasiones suele ocurrir que si la función, por ejemplo, está definida a intervalos, para hallar el límite de la función en un punto hay que recurrir a estos límites laterales. Eso ocurre, por ejemplo, en el ejercicio de autocomprobación número 1. También es muy interesante el ejemplo 3 de la página 126.

Si se representa gráficamente la función, podrá comprobar el alumno que sea cual sea el punto que elija como posible límite, no cumplirá la definición. Normalmente el cálculo de límites no se hace utilizando la definición. Es decir, en principio tenemos la definición, demostramos una serie de cuestiones y a partir de esos resultados es como nosotros solemos hallar los límites.

Entonces no les vamos a exigir, como siempre decimos, las demostraciones de todas estas cuestiones, pero conviene, en bastantes casos que las demostraciones son sencillas, que el alumno se las lea para que vea cómo se van desarrollando a partir de la definición todos los resultados que luego utilizamos. En los ejemplos 1 y 2 de la página 126 están demostrados los límites de la función constante y de la función identidad. También se demuestra, como podrán ver en el libro, que el límite de una suma es la suma de los límites, que el límite de un producto es el producto de los límites y que el límite de un cociente es el cociente de los límites si el límite de la función del denominador es distinto de cero.

Y estas reglas son muy útiles para ejercicios prácticos, para resolver límites de expresiones complejas como pudieran ser polinomios. Con todas estas reglas se puede hallar el límite de un polinomio o de una función racional muy fácilmente. Pueden observar con detenimiento los ejemplos 1 y 2 de la página 134 que tratan el límite de un polinomio y una función racional.

Como observarán, basta hallar el valor de la función en el punto. Por último, también se trata en este tema de los límites infinitos y límites en el infinito. En las páginas 137 y 138 se particulariza la definición de límite a cada caso concreto de límite, infinito o no, y al punto en el que se calcula el límite, también infinito o no.

Antes de pasar a comentar el siguiente tema de esta unidad, quizá nos podría resumir un poco los objetivos de este segundo tema sobre el límite de funciones. ¿Qué es lo que se pretende con este tema? Realmente creo que será un enfoque fundamentalmente práctico hacer límites de funciones, puesto que en el primer tema de esta unidad había también un enfoque como muy teórico de dar la definición de límite. ¿Qué se pretende con este tema de límites de funciones? Se trata en este tema de que el alumno adquiera la destreza necesaria para poder calcular el límite de una función en un punto.

Esto lo va a lograr, claro, está haciendo bastantes ejercicios, como siempre ocurre en cualquier tema de matemáticas. Y si pasamos ya al tercer tema de esta unidad, que es el de continuidad, realmente es una continuación, valga la redundancia, del tema de límites. Necesitábamos el concepto de límite para entender lo que es la continuidad.

¿Y por qué? Porque en el tema de límites hemos visto que para que exista el límite de una

función en un punto, no hace falta que esté definida la función en ese punto. Ahora damos un paso más adelante. Vamos a decir que una función es continua en un punto si el límite de esa función en el punto es precisamente el valor de la función en el punto.

Si ustedes ven en el libro que tiene la definición, esto va a presuponer tres cosas. En primer lugar, para que una función sea continua, tiene que existir f de a , tiene que estar definida la función en el punto a . Tiene también, además, que existir el límite de la función cuando x tiende a a , segunda parte. Y en tercer lugar, tienen que coincidir este valor del límite con el valor que toma la función en el punto.

¿Y la definición de continuidad también la podemos dar utilizando entornos como hacíamos con el límite? La definición no es la misma, pero en lugar de tomar un entorno reducido de a , como hacíamos antes, ahora ya no lo tomamos reducido, es decir, que también interviene el punto a . Por eso, es necesario para que una función sea continua en un punto, que esté definida en ese punto. En los ejemplos de la página 151, 152 y 153, tienen bastante bien explicado cómo se hallan la continuidad de una función en el punto. Y en las de la 154 y 155, se aplican las propiedades de la suma, producto y cociente de dos funciones continuas.

No hay que olvidar también, que al igual que en límites, hacíamos límites a la izquierda y límites a la derecha cuando era necesario, también en las funciones continuas podemos estudiar la continuidad a la izquierda y la continuidad a la derecha. Entonces, con todos esos ejemplos de las páginas que he nombrado anteriormente, que serían de la página 151 a la 155, podemos deducir que las funciones constante, identidad y polinómicas son continuas en todos sus puntos, y también las racionales, excepto en los valores en los que se anula el denominador. Y en plan práctico, para calcular si una función es continua en un punto, ¿qué hay que hacer? Para calcular si una función es continua en un punto, en primer lugar, podemos hallar el valor que toma la función en el punto considerado.

Después, tendríamos que hallar el límite de la función en ese punto y ver si el límite ese coincide con el valor de la función en el punto. Es decir, esos dos valores coinciden. ¿Cómo solemos hacer esto normalmente? Pues de la siguiente manera.

Nosotros ya hemos visto que hemos demostrado en los ejemplos anteriormente citados que las funciones constante, identidad, polinómicas y racionales, excepto en los puntos en los que se anula el denominador, son continuas. Entonces, normalmente, esto nos sirve para poder hallar el límite de una función. Es decir, si a nosotros nos piden hallar el límite de un polinomio, no tenemos que pensar si va a existir o no va a existir.

Ya sabemos que la función polinómica es continua en todos sus puntos y, por lo tanto, va a existir el límite. Por lo tanto, directamente hallamos el límite sustituyendo ese punto en la función. Es decir, hallando el valor de la función en ese punto.

Quería resaltar, por último, que el alumno debe estudiar, que son bastante importantes y, además, muy interesantes a la hora de sacar conclusiones, los teoremas de Bolzano, de los

valores intermedios y de Ballestras. Y también decir que la última parte de este tema, que es la continuidad uniforme, quizá es un poco más difícil y el alumno puede relegarla a un segundo plano por ser, en este curso, la hemos considerado menos importante al ser un poco más difícil. Y pasamos al tema de las funciones derivables en el que seguimos necesitando, como en toda la unidad, el concepto de límite.

¿Qué es la derivada? La derivada en un punto. Vamos a definir lo que se llama derivada de una función en un punto, que es un valor numérico y que es, precisamente, un límite. En el libro tienen explicada, definida, definido este concepto y lo vamos a decir aquí, aunque quizá por radio resulta un poco difícil.

Decimos que una función es derivable en A si existe el límite, cuando h tiende a cero, de f de A más h menos f de A partido por h . A este límite le llamamos f' de A y se dice, entonces, que la función es derivable en el punto A . No hay que olvidar que, como todo límite, es un valor, un número real lo que obtenemos al hallar la derivada de una función en un punto. También podemos expresar la derivada de otra manera, que quizá a los alumnos les resulte más sencilla, y es en lugar de utilizar h , no utilizar solamente x y A . Es decir, la derivada de una función en un punto sería el límite, cuando x tiende a a , de f de x menos f de A partido por x menos A . En el libro tienen la interpretación geométrica de la derivada en la página 181 y que es muy interesante que el alumno vea con detenimiento esta gráfica para que pueda entender un poco mejor este punto. Hay un teorema muy interesante que nos dice que si una función es derivable en un punto, entonces es continua.

Esto nos va a ayudar muchas veces a hallar la derivada de una función, porque nosotros sabemos que si una función es derivable en un punto, entonces es continua. Si estamos ante una función que no es continua en un punto, no va a tener derivada. No hay que olvidar, sin embargo, que el recíproco no es cierto.

Es decir, que hay funciones continuas que no son derivables, que no tienen derivadas. Como hemos hecho en los temas anteriores, normalmente cuando hallamos la derivada de una función en un punto, que es fundamentalmente lo que nos interesa en este curso, hacer ejercicios de derivadas, no nos vamos a limitar a aplicar la definición. Es decir, no cada vez que vamos a hallar la derivada de una función en un punto, hacemos el límite de todo lo que he dicho antes.

Sino que a lo que nos vamos a dedicar es a dar unas propiedades generales y luego aplicar esas propiedades al cálculo de derivadas. Sí, esas propiedades o reglas prácticas para el cálculo, igual que antes, son las que tenemos que recordar, puesto que son las que directamente nos sirven para hacer ejercicios, para hacer problemas. Se demuestra que la derivada de una suma es igual a la suma de derivadas.

Que la derivada de un producto, del producto de dos funciones, claro está, es la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar, más la primera función sin derivar por la segunda derivada. Quizá esto parece un galimatías, dicho así de palabra, pero visto en una

fórmula es bastante sencillo. También tenemos la derivada de un cociente de dos funciones, que es la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar y partido por el denominador al cuadrado.

Por supuesto que en el numerador hay una función y en el denominador hay otra función. También es interesante el resultado que se obtiene para hallar la derivada de la función compuesta o la derivada de la función inversa. Entonces todos estos resultados nosotros los vamos a aplicar después para hallar las derivadas de las funciones que tengamos que hallar.

Tenemos en la página 180 una serie de ejercicios, de ejemplos, muy ilustrativos de cómo vamos a ir hallando las derivadas de las distintas funciones. Por ejemplo, en el primero tenemos que hallar la derivada de la función constante. Se aplica la definición y obtenemos que la derivada de la función constante es cero.

Esto ya nos sirve para aplicarlo en las distintas veces en que tengamos que hallar la derivada de una función constante. Lo mismo tenemos para la función identidad, que se ve en el ejemplo 2, que la derivada es 1. Y en los demás ejemplos, en el 3 y en el 4, vamos viendo las distintas formas de obtener una serie de derivadas. Muy interesante es el ejemplo 4 porque tenemos definida la función en intervalos.

Entonces tendremos que hallar la derivada a la izquierda y la derivada a la derecha. Y si coinciden esos límites existe derivada. No hay que olvidar que la derivada es un límite.

Por lo tanto, podemos hallar el límite a la izquierda y el límite a la derecha. Existirá derivada cuando esos dos límites coincidan. ¿Y de esta lección nos queda alguna cuestión importante más antes de pasar al tema de las aplicaciones de las derivadas? Sí, nos queda una última cuestión y es el de las derivadas sucesivas.

Nosotros tenemos una función y hallamos la derivada de esa función en un punto. Podemos definir una nueva función de tal manera que a cada valor de a o a cada valor de x le hagamos corresponder su derivada. Entonces obtenemos así la función derivada primera, que sería f' de x . Ya es una función, por lo tanto la podemos volver a derivar.

Y entonces lo que obtendríamos sería la derivada primera de esa derivada primera. A esa derivada primera de esa derivada primera se le llama derivada segunda. Y podemos obtener otra función.

Y así podemos seguir sucesivamente. Y es a lo que se llama derivadas sucesivas. De todas formas, con los conocimientos que el alumno tiene hasta ahora, todavía hay muchas derivadas que el alumno no puede hacer.

¿Por qué? Porque no se han dado las funciones exponencial, logarítmica y trigonométrica que se verán en la unidad siguiente. Una vez vistas estas funciones, deberán hacer ejercicios de derivadas de estas funciones. Puesto que las derivadas, para aprenderlas bien, hay que hacer muchos ejercicios de ellas y adquirir una cierta destreza para hacerlo bien.

Y ya vamos a terminar el programa de hoy refiriéndonos al último tema de esta quinta unidad didáctica, que trata de las aplicaciones de las derivadas. En este tema se estudian propiedades y condiciones necesarias y suficientes para que la gráfica de una función presente un máximo o mínimo relativo, un punto de inflexión, sea creciente o decreciente y sea cóncava o convexa. No olviden que es distinto el máximo que nosotros hemos visto hasta ahora, que era un máximo absoluto, es decir, el valor mayor que tomaba la función en un intervalo, con este máximo relativo.

Que lo que se trata es de que en un entorno de ese punto máximo, por ejemplo, el valor de la función en ese punto sea mayor que en los de ese entorno. Y lo mismo con mínimo, solo que al revés. Entonces, para estudiar estos temas de máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento, etc., se dan una serie de teoremas y proposiciones que además proporcionan, entre otras cosas, un método muy bueno para hallar límites de funciones, que es la regla del hospital.

Muy importante en este curso que nos va a ayudar a resolver límites que al hacerlo por el método habitual nos dan unas indeterminaciones, cero partido por cero, infinito partido por infinito. Con la regla del hospital vamos a eliminar estas indeterminaciones. Bueno, este tema es fundamental porque es como la coronación de toda esta quinta unidad didáctica y casi seguro que de esto caerá algo en el examen final.

Importantísimo saberse la regla del hospital para resolver límites indeterminados del tipo cero partido por cero, infinito partido por infinito, y también saber hallar esos puntos notables, máximo, mínimo, y también las situaciones de crecimiento, decrecimiento, a las que se ha hecho referencia. Pero esto ya en plan práctico, ¿qué reglas tenemos que tener en cuenta? Si F es derivable en un punto A , es condición necesaria para que tenga un máximo mínimo en A que la derivada primera sea cero. Por lo tanto, para hallar los máximos y mínimos de una función deberemos imponer la condición de que esa primera derivada sea cero.

De ahí obtendremos unos valores que serán los posibles máximo o mínimo. También se demuestra que si F es derivable, entonces si la derivada primera es mayor que cero, la función es creciente en ese punto, y si la derivada primera es menor que cero, la función es decreciente en ese punto. Esto nos sirve para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

En este tema se estudian también los teoremas de Rolle de Cauchy de valor medio y la regla del hospital, que ya hemos mencionado antes, que permite calcular el límite del cociente de dos funciones que en principio sea indeterminado. Esto es lo que nos va a hacer la regla del hospital. Derivamos cada una de las funciones, la del numerador por un lado y la del denominador por otro, y así eliminamos esa indeterminación y podemos hallar el límite.

Mucho ojo, no olviden que aquí la derivada no es la derivada de un cociente, sino que es derivar la función del numerador por un lado y la función del denominador por otro. Conviene que el alumno haga bastantes problemas de la regla del hospital pues es muy interesante y deben adquirir la destreza necesaria para saber hallar, eliminar una indeterminación aplicando este

método. Por último vamos a nombrar las condiciones que tenemos para hallar los puntos notables, las que nos faltan.

Si f es derivable en a y la derivada primera en a es cero, entonces si la derivada segunda es positiva existe un mínimo relativo en a y si la derivada segunda es negativa existe un máximo relativo en a . Además si la derivada segunda es mayor que cero es convexa la función y si la derivada segunda es negativa es cóncava. El paso de cóncava a convexa o de convexa a cóncava nos da los puntos de inflexión de la función. Por último también podemos hallar los puntos de inflexión de la función obligando a que la derivada segunda sea cero y estudiando si en ese punto la derivada tercera es distinta de cero.

Y ya para terminar, aunque esto ya lo hemos dicho, pero quizá conviene insistir, me imagino que lo fundamental de esta unidad son los ejercicios prácticos, ¿no? Es decir, esta quinta unidad didáctica es eminentemente práctica. Todos los temas de esta unidad requieren muchos ejercicios por parte del alumno que deben realizar para comprender bien estos temas. Todavía queda otro programa de matemáticas especiales en donde hablaremos del contenido de la sexta unidad didáctica y un último programa de orientación específica y concreta ante el examen final.

Gracias, Paloma Pantoja de Loki. Buenas noches. Bien, esto fue todo por parte de la Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Fueron, como siempre, dos horas y media en las que una vez más hemos intentado acercarnos a algunos aspectos de interés universitario y cultural. Mañana os esperamos de nuevo a partir de las nueve de la noche. Como todos los miércoles nos centraremos en temas de Economía, Filosofía, Arte y Educación.

Hasta entonces, muy buenas noches. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org