

AC 15 5

Matemáticas especiales. Relación de orden, orden total y parcial. Vamos a continuar hoy con las relaciones binarias introduciendo un nuevo concepto, el de relación de orden.

Seguramente tenemos que hacer lo mismo que en las relaciones de equivalencia. Primero definiremos una relación binaria entre los elementos de un conjunto y después tendremos que comprobar si se verifican ciertas propiedades, ¿no es así? Exactamente. Recordarán que al introducir el tema de relaciones enunciamos cuatro propiedades que podían verificar estas, las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

¿Se acuerdan de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva? La primera propiedad, la reflexiva, nos dice que en una relación binaria definida en un conjunto A se verifica la propiedad reflexiva si se puede afirmar que todo elemento de A está relacionado consigo mismo. Muy bien, ¿y la simétrica? Se cumple la propiedad simétrica en una relación binaria definida sobre un conjunto A si para cada dos elementos de A , tales que el primero está relacionado con el segundo, se verifica necesariamente que el segundo está relacionado con el primero. Estupendo.

Por último, ¿cuál es el enunciado de la propiedad transitiva? Para que se verifique la propiedad transitiva en una relación binaria definida sobre un conjunto A , es necesario que para cada tres elementos de A , tales que el primero está relacionado con el segundo y el segundo está relacionado con el tercero, se cumpla necesariamente que el primero esté relacionado con el tercero. Exactamente. Estas son las tres propiedades vistas hasta ahora, y además son las que se tienen que verificar para que una relación binaria sea relación de equivalencia.

Ahora bien, hay una cuarta propiedad, la propiedad antisimétrica, de la cual sólo he dicho el enunciado en una emisión anterior. ¿Podría repetir dicha propiedad? Yo no la entiendo bien. Tampoco yo la he llegado a comprender.

Para ver si entienden mejor la propiedad antisimétrica, empecemos con un ejemplo. Supongamos que consideramos el ejemplo, ya puesto en emisiones anteriores, de los habitantes de Cádiz, y la relación binaria es siguiente. Un habitante está relacionado con otro habitante de Cádiz si el primero es padre del segundo.

Supongamos que tenemos dos personas distintas, por ejemplo, Juan y Pedro, de forma que Juan es padre de Pedro, es decir, Juan está relacionado con Pedro. Evidentemente, Pedro no es padre de Juan, luego Pedro no está relacionado con Juan. Y esto se verifica para dos cualesquiera de los habitantes distintos de Cádiz que cumplan dicha relación.

Pues bien, este ejemplo es la comprobación de que la propiedad antisimétrica se cumple en esta relación binaria definida. Creo que entiendo lo que ha dicho, es decir, que si un elemento está relacionado con otro, necesariamente este segundo no puede estar relacionado con el primero. Bien, veo que ha captado la idea, aunque para que sea exacta le falta un detalle.

Voy a dar el enunciado para que vean el detalle. Dado un conjunto A y una relación binaria definida sobre dicho conjunto, se dice que esta relación verifica la propiedad antisimétrica si y sólo si para cada dos elementos distintos del conjunto, tales que uno esté relacionado con otro, se verifica necesariamente que este segundo no está relacionado con el primero. Veo entonces que lo que le faltaba a mi compañera en su explicación del ejemplo es que los elementos tienen que ser distintos, pero no veo la necesidad de que sean distintos.

Aclaremos esto con otro ejemplo. Supongamos que consideramos un conjunto E y el conjunto de las partes de E . ¿Recuerdan qué elementos tiene el conjunto partes de E ? Claro que sí. El conjunto partes de E está formado por todos los subconjuntos de E . Muy bien.

Entre todos los subconjuntos de E están el conjunto vacío y el conjunto E , ya que estos también son subconjuntos de E . Estupendo. Veo que van asimilando los conceptos. Pues bien, en el conjunto de las partes de E establecemos la siguiente relación binaria.

Un elemento está relacionado con otro si el primero está incluido en el segundo. ¿Cumple esta relación la propiedad antisimétrica? Vamos a ver. Tomemos dos conjuntos distintos A y B de partes de E , tales que A esté incluido en B . Entonces es evidente que B no está incluido en A . Luego sí verifica la propiedad antisimétrica.

Ah, claro, porque si consideramos el conjunto A de partes de E , A está relacionado con A , pues A está incluido en sí mismo. Pero según la propiedad antisimétrica se tiene que verificar que A no está incluido en A , lo cual es falso. Luego, por eso, es necesario decir que los elementos tienen que ser distintos.

La propiedad antisimétrica, tal y como está definida, nos dice que no podemos aplicarla a dos elementos iguales, pues si no llegaríamos a una contradicción. Entonces, para enunciar esta propiedad, hay que decir siempre que los elementos que tomamos son distintos. Existe otra forma de enunciar esta propiedad y entonces no hay que especificar que los elementos tienen que ser distintos.

Dado un conjunto A en el que se ha definido una relación binaria, se dice que se verifica la propiedad antisimétrica si para dos elementos cualesquiera, A y B del conjunto A , tales que A está relacionado con B y B está relacionado con A , necesariamente se verifica que A es igual a B . Voy a ver si esta definición se cumple en nuestro ejemplo. Si dos elementos A y B de partes de E son tales que A está incluido en B y B está incluido en A , entonces es que A es igual a B , porque todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A . Y en cualquier otro caso, una de las dos inclusiones no se verifica. Muy bien.

Para comprobar la propiedad antisimétrica, podemos utilizar uno cualquiera de los dos enunciados. Y me parece que con estos ejemplos está entendido. Sí, ha quedado muy claro.

Vamos a dar una nueva definición. A una relación binaria definida sobre un conjunto A se le llama relación de orden si verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. ¿Podría

ponernos algún ejemplo? Desde luego.

Vamos a comprobar que la relación binaria definida en el conjunto de las partes de E , tal que un elemento está relacionado con otro si el primero está incluido en el segundo, es relación de orden. La propiedad reflexiva sí se verifica, pues dado cualquier elemento A de partes de E , siempre se cumple que A está incluido en A . Por lo tanto, todo elemento está relacionado consigo mismo. Hemos visto antes que la antisimétrica también se cumple.

Luego sólo nos falta ver la propiedad transitiva. Sean tres elementos A , B y C de partes de E , tales que A está incluido en B y B incluido en C . Esto quiere decir que todo elemento de A pertenece a B y que todo elemento de B pertenece a C . Luego, todo elemento de A pertenece a C , es decir, A está incluido en C . Entonces cumple también la propiedad transitiva. Luego se verifican las tres propiedades necesarias para que la relación definida sea de orden.

Estupendo. Les voy a proponer un nuevo ejemplo. Consideramos el conjunto de los números naturales, es decir, el conjunto de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, etcétera, o sea, los números de contar.

En este conjunto defino la siguiente relación binaria. Un número está relacionado con otro si el primero es menor o igual que el segundo. Cuando usted dice menor o igual, entiendo que se refiere, por ejemplo, a que 5 es menor o igual que 17.

En cambio, 17 no es menor o igual que 5. Aunque realmente, en este caso, el 5 es menor que 17. Muy bien. Vamos a comprobar si la relación menor o igual definida en el conjunto de los números naturales es o no es relación de orden.

Habrá que ver si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. La propiedad reflexiva se cumple de una manera inmediata, pues todo número es igual a sí mismo. Luego, todo número natural es menor o igual que el mismo.

La antisimétrica también es evidente que se verifica, pues si dados dos números naturales distintos, tales que el primero sea menor o igual que el segundo, no se puede cumplir que el segundo sea menor o igual que el primero. Sólo falta por ver la propiedad transitiva. Tomamos para ello tres números naturales cualesquiera, de forma que el primero sea menor o igual que el segundo y el segundo menor o igual que el tercero.

Entonces se ve claramente que el primero es menor o igual que el tercero. Luego, esta relación es de orden. ¿Y por qué es necesario introducir el igual en esta relación? Yo creo que bastaría con el menor.

Compruebe usted mismo si esta relación que ha dicho, es decir, que dados dos números naturales, el primero está relacionado con el segundo, si el primero es menor o igual que el segundo, es relación de orden. ¡Ah, claro! Me doy cuenta que no puede ser porque no cumple la propiedad reflexiva, ya que ningún número es menor que sí mismo. Pero sí se verifican las propiedades antisimétrica y transitiva, pues en esta sólo interviene el menor.

Como conclusión de esto, podemos decir que para que sea relación de orden, se tienen que cumplir las tres propiedades. En cuanto deje de verificarse una, ya no puede ser relación de orden. Creo que hemos entendido ya lo que es una relación de orden.

Pasemos a introducir un nuevo concepto. Podrán notar ustedes que en el ejemplo anterior, dados dos elementos cualesquiera del conjunto de números naturales, siempre están relacionados, es decir, uno de los dos siempre es menor o igual que el otro. Es verdad.

Cogiendo dos números al azar, por ejemplo el 30 y el 16, el 16 es menor o igual que el 30. Luego el 16 está relacionado con el 30. En efecto.

Generalizando este ejemplo, diremos que una relación de orden definida sobre un conjunto A es de orden total si, dados dos elementos, A y B cualesquiera de A , siempre se puede afirmar que A está relacionado con B , o bien que B está relacionado con A . Entonces, en el ejemplo de antes, el de la relación menor o igual es relación de orden total. Pero a mí me parece que esto se cumple en todas las relaciones de orden, porque siempre están relacionados entre sí todos los elementos de un conjunto. Recordará que la definición de relación binaria sobre un conjunto A es cualquier subconjunto de pares ordenados del conjunto A por A , y el único subconjunto que tiene todos los pares posibles es el mismo A por A . Luego habrá muchas relaciones en las que no todos los pares ordenados posibles aparezcan, y el que el par ordenado $A-B$ no aparezca quiere decir que A no está relacionado con B . Además habrá notado que en las propiedades que hemos enunciado de las relaciones binarias sólo se exige que la cumplan todos los elementos en la propiedad reflexiva, mientras que en las demás sólo se exige la propiedad para aquellos pares ordenados que aparezcan.

Es verdad, porque en la propiedad simétrica, por ejemplo, considerábamos que si A está relacionado con B , entonces B tiene que estar relacionado con A , pero sólo en el caso de que A esté relacionado con B . Esto significa, además, que si B está relacionado con A , necesariamente A está relacionado con B . Comprueben en casa que el mismo tipo de condición se impone en las propiedades antisimétrica y transitiva. Entiendo ahora que no todas las relaciones de orden son de orden total, pero ¿puede darnos algún ejemplo de esto? Claro que sí. Veamos un ejemplo que ya hemos utilizado hoy.

Tomamos un conjunto E y en el conjunto de partes de E definimos la relación de inclusión que ya vimos que es de orden. Pues bien, dados dos subconjuntos de E , es decir, dos elementos de partes de E , no necesariamente están relacionados, ya que puede ocurrir que ninguno de ellos esté incluido en el otro. Por ejemplo, el conjunto E es el conjunto formado por los elementos 1, 2 y 3. ¿Pueden decir dos subconjuntos de E , por tanto dos elementos de partes de E , tales que ninguno esté incluido en el otro? Por ejemplo, el subconjunto formado por el 1 y el 2 y el subconjunto formado por el 2 y el 3. Muy bien.

Pues a una relación de orden que cumpla lo anterior, es decir, que dados dos elementos de un conjunto A en el que se ha definido una relación no siempre están relacionados, se dice que es relación de orden parcial. Entonces, si una relación de orden no es de orden total, es que es de

orden parcial. Muy bien.

Y con esto damos por terminado el tema de relaciones binarias que nos ha ocupado estos días.