

AC 15 42

Curso de acceso directo. Un programa para los alumnos matriculados en el CAD, curso de acceso directo a la universidad para mayores de 25 años de la Universidad Nacional de Educación a Distancia. Un programa que se emite de lunes a jueves de 11 a 11 y media de la noche hora peninsular, de 10 a 10 y media en Canarias.

Y en el que esta noche nos va a ocupar la asignatura de matemáticas especiales. Con la profesora Teresa Ulecia García realizaremos unos comentarios sobre el contenido de la unidad didáctica número uno, dando orientaciones para su asimilación. Y asimismo haciendo una referencia a las principales dificultades que se pueden encontrar.

En el control Jesús Cediel presentando el programa como cada noche Arturo Manuel Fernández. Estamos en todo el territorio nacional a través de Radio Nacional de España en frecuencia modulada. En todo el territorio nacional por Radio 3 y en las localidades de Soria, Palencia, Caba, Ciudad Real, Calahorra y Ávila por Radio 4. Asimismo nos escucháis en Barbastro, en Radio 5, Radio Nacional de España en onda media y en Radio Aragón de Calatayud.

Como hemos indicado con la profesora Teresa Ulecia García, esta noche vamos a ver tema a tema los cuatro temas que forman la primera unidad didáctica de matemáticas especiales. Para centrarnos en algunos aspectos muy concretos en los que la experiencia nos demuestra que los alumnos suelen tener dificultades al estudiar. Y no olvidéis que esta asignatura es conveniente prepararla no solamente por el libro de teoría sino también por el libro de problemas dado que en el examen final se pedirán problemas.

En consecuencia lo que hablemos esta noche con respecto a la primera unidad didáctica serán unas consideraciones referidas a la teoría que hay que dominar en esta primera unidad didáctica y por supuesto es necesario mirar los modelos y ejemplos de problemas resueltos que aparecen en el libro de problemas con relación a estos cuatro primeros temas. Vamos a ver Teresa, empezando por el primer tema, el de conjuntos, ¿qué podemos decir? En este primer tema, y podríamos decir igual del tema 2, el objetivo principal es precisar el que van a utilizar a lo largo del curso. En concreto ya en el tema 1 hay dos partes muy diferenciadas, la parte de conjuntos y la parte de relaciones.

En cuanto a la parte de conjuntos, ya tengo experiencia que un cierto número de alumnos llevan ya una serie de años sin estudiar matemáticas, con lo cual esta parte de teoría de conjuntos no la han visto nunca. Se enfrentan con la primera hoja en la página 13, con la definición de conjunto, y empiezan a ver una serie de símbolos que les lía bastante. Bueno, yo lo que creo que deben hacer es coger una hoja y un papel e ir viendo cada definición y cada propiedad con ejemplos sencillos.

En la página 15, por ejemplo, tienen en la definición de unión e intersección dos ejemplos. En el

primer ejemplo les habla de un conjunto A finito con tres elementos. Sí, lo estamos viendo aquí, tenemos delante la página 15.

Los alumnos ya se han aprendido clarísimamente lo que es la definición de conjunto y subconjunto, porque eso esperamos que todo el mundo lo haya entendido. Pero al principio de la página 15 hay un conjunto A mayúscula, que está formado por los elementos 1, 3 y 5. Es finito porque tiene un número finito limitado de elementos. Y luego un conjunto B que está formado por los elementos 1, 2, 3 y 4. En el ejemplo, primero calculan la unión de sus conjuntos, que son el conjunto formado por los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos.

En este caso sería el conjunto formado por el 1, 2, 3, 4, 5. Eso es. Es que a veces ya no entienden ni siquiera la unión, ese símbolo. El símbolo de la U significa unión.

Como una U grande no entienden eso. Y es una operación entre dos conjuntos y es el conjunto formado, simboliza, es un símbolo con el cual representa el conjunto formado por los elementos de ambos conjuntos. Que están en los dos.

Y es un nuevo conjunto. Luego, en el caso de la intersección, es otro nuevo conjunto, se representa con una $\cap$ al contrario. Como al revés.

Y está formado por el conjunto de los elementos comunes a ambos conjuntos. Es decir, en este ejemplo que hemos dicho antes, sería el conjunto formado por el número 1 y el número 3. Eso es. Recordad, por favor, la intersección son los elementos que son comunes a los dos conjuntos.

Mientras que la unión son los elementos que están o en uno o en otro. Eso es. Luego después viene ya un ejemplo que ya es en el cual los conjuntos ya son, por ejemplo, uno es el conjunto de los números naturales múltiplos de 2. Otro, el conjunto B, conjunto de los números naturales múltiplos de 3. Estos ejemplos ya son un número, son conjuntos infinitos.

Tienen un número infinito de elementos. Es un poco más complicado. Entonces, si hay alumnos que no ven bien este segundo ejemplo, conviene que sigan practicando y ellos mismos se pongan ejemplos del tipo finito.

Ejemplos sencillos. No sólo para esta primera parte donde empiezan a definir, sino para después las propiedades de la unión, de la intersección y demás. Propiedades que vienen más adelante y que poco a poco la cosa se va complicando.

Entonces, antes de pasar, de seguir hojas y hojas sin entender, conviene que se cojan un papel y un lápiz y vayan viendo todas las definiciones y las propiedades con ejemplos sencillos. Eso es. Y cuando ya noten que lo entienden, entonces ya se ponen y ya siguen el libro viendo ejemplos un poco más complicados.

Claro, porque es que aquí el principio de la página 15, el primer ejemplo es de conjuntos finitos,

es decir, con los elementos dados, con un número limitado de elementos. Pero el ejemplo número dos son ejemplos de conjuntos infinitos, donde hay muchísimos elementos y entonces se definen de otra manera. No se definen por extensión, sino a lo mejor a veces por comprensión, dando una propiedad.

Y eso les puede despistar. Entonces, como he dicho a la profesora, por favor, ponerlo por escrito, coger las definiciones y no seguir, si no se entiende, porque entonces se está perdiendo el tiempo. De esta lección primera, ¿qué más aspectos? De esta lección primera, en unión, intersección y el complementario, yo creo que no me voy a parar en ninguna, porque pienso que de esta primera parte es sólo eso.

Es un poco la nomenclatura, los símbolos y tiene que ser cogiendo ejemplos e ir haciéndolo. Claro, igual que hemos visto la unión o la intersección, todos los demás símbolos hay que aprenderlos y darse cuenta de que son unos símbolos que sirven para hacer operaciones entre conjuntos y que siempre permiten obtener un nuevo conjunto, que es el resultado de esa operación, de utilizar ese símbolo bueno. Bueno, pasamos entonces a las relaciones.

Las relaciones es fundamental que sepan distinguir bien cuándo una relación es de equivalencia y una relación es de orden. Para ello tienen que ver las propiedades que cumple la relación. La definición de las propiedades de la relación las tiene en la página 21.

Está primero la propiedad reflexiva. Se dice que una relación cumple la propiedad reflexiva cuando todo elemento del conjunto está relacionado con él mismo. Esta propiedad normalmente no presenta dificultades.

Después definen la relación simétrica. La relación simétrica se dice que una relación cumple la propiedad simétrica cuando si un elemento x está relacionado con otro elemento y , entonces debe estarlo y relacionado con x . Es como un cambio de orden. Es importante que vean que en la definición aparece una condición.

En realidad en el libro, en la página 21, les dicen x relacionado con y implica y relacionado con x . A lo mejor lo entienden mejor con esta manera de condición. La definición puesta con condición, en realidad esto es una condición, es si x está relacionado con y debe estarlo obligatoriamente, entonces implica y relacionado con x . Además la propia palabra lo indica. O sea, simétrica, propiedad simétrica.

Si x está relacionado con y , entonces y está relacionado con x . Para ver ejemplos, en esta parte también se podrían poner unos ejemplos sencillos de conjuntos finitos y hacer un diagrama de vez. O sea, ver la relación mediante flechas. En el caso de la propiedad reflexiva, según la propiedad reflexiva, si todos los elementos tienen lo que llaman un bucle, que es una flecha que parte y vuelve origen y extremo el mismo elemento.

La simétrica sería si todas las flechas son dobles. No puede haber flecha sencilla. Si hay una flecha de ida, tiene que haberla de vuelta.

Ahora, puede ser que no haya flecha de ida. Ahí está la condición. O sea, no es que la propiedad simétrica obligue a que tenga que haber una flecha de a a b y de b a a . No.

Dice que si hay de a a b , tiene que haberla de b a a . Por ejemplo, un ejemplo muy sencillo. Un conjunto con dos elementos. Un elemento a y uno b . La relación definida de a con a y b con b sería reflexiva, sería simétrica y sería transitiva.

Que es la tercera propiedad de la relación. Tercera propiedad que también implica una condición. Y la condición sería así.

Si x está relacionado con y y a su vez y lo está con z , debe ser, se debe cumplir, es necesario, que x esté relacionado con z . Eso es. Pero si las dos primeras hipótesis, x con y e y con z , no se cumplen, no se tiene por qué cumplir la tercera. Eso en un examen en junio se puso y la mayoría de los alumnos lo hicieron mal.

Cuando es una cosa del principio. Porque claro, entender esas tres propiedades, la reflexiva, la simétrica y la transitiva, es que es fundamental. Porque son propiedades que si no se entienden, no se puede definir el concepto de relación.

De equivalencia y de clases de equivalencia, que luego van a utilizarlo por lo pronto para... Entonces, por favor, la transitiva recordad, si a está relacionado con b . Es la condición. Y b está relacionado con c , entonces a está relacionado con c . O con x e y como aparece aquí en el libro. Bueno, más aspectos.

Entonces, bueno, dentro de las tres propiedades, una vez que se ven las tres propiedades, es saber hallar el conjunto cociente. El conjunto cociente es un conjunto en el cual los elementos son en su vez conjuntos. O sea, es un conjunto de conjuntos.

Los elementos son, se llaman clases de equivalencia, y están formados por un elemento y todos sus relacionados. De esta manera, cuando en un conjunto se cumplen, se ha definido una relación que cumple las tres propiedades, reflexiva, simétrica y transitiva, y que es por tanto de equivalencia, se puede hacer una partición del conjunto. De hecho, las relaciones de equivalencia, el objetivo es para poder partir el conjunto, o clasificar, se dice también clasificar el conjunto.

Si en un conjunto no se puede hacer una partición perfecta, no hay relación de equivalencia, no es definida una relación de equivalencia. Y se utiliza luego más adelante cuando definamos los números reales y luego los números complejos. Se define una relación de equivalencia... O sea, de la relación de equivalencia, que ahora no entendéis por qué está ahí, recordad el concepto, recordad para qué es.

Porque eso, cuando más adelante se estudien los números, como los números reales y los números complejos, hay que volver a este concepto. Al concepto de relación de equivalencia. Y ya por último sería la relación de orden que cumple otras propiedades.

Una de ellas, bueno, esa es la antisimétrica. La diferencia con la relación de equivalencia es que en vez de cumplir la simétrica, cumple la antisimétrica. Y es, el mismo no me lo dice, justo lo contrario.

En la antisimétrica, para que se cumple, no puede estar relacionado. Si está relacionado x con y , no puede estarlo y con x . En la relación de orden, lo que hace es, a lo mismo que la equivalencia era clasificar o hacer una partición del conjunto, la de orden lo que hace es ordenar el conjunto. Puede ser total o parcial, según que todos los elementos estén ordenados o no.

O sea que entonces la diferencia está solamente en la cuestión de la propiedad antisimétrica. O sea que es muy fácil de recordar. Bueno, pues pasamos ahora al tema 2. Aquí en problemas y exámenes, ¿en qué aspectos concretos se ve que los alumnos suelen fallar? Bueno, pues principalmente en el caso de las aplicaciones, deben saber, dada una aplicación, en principio dada una correspondencia entre dos conjuntos, mirar a ver si es aplicación, y en el caso de ser aplicación, ¿qué tipo de aplicación? Si es inyectiva, si es suprayectiva y si es biyectiva.

O sea que se da una correspondencia, primero hay que ver si cumple ciertas propiedades, que es lo que nos dicen, que esa correspondencia es aplicación, y después si cumple las propiedades específicas propias de cada uno de los tres tipos de aplicaciones que hay. O sea que la cuestión es fácil. En el caso de la ley de composición interna, que es la otra parte de este tema, sería prácticamente igual.

Darán un conjunto en el cual se define una ley. Deben ver qué propiedades cumple. Si es una ley interna, si cumple la propiedad asociativa, la propiedad conmutativa, si tiene elemento neutro, diciendo cuál sería el elemento, y por último, dado un elemento cualquiera, si tiene elemento simétrico.

Y lo que tenéis que hacer es coger un lápiz y un papel e irlo anotando los ejemplos del libro, irlo haciéndolo vosotros. Además, es importante este tema para posteriormente la unidad 2, ya veremos más adelante, cuando empezamos a hablar de estructuras. Las estructuras se basan principalmente en las propiedades de las leyes, viene luego la estructura de grupo, de anillo y demás.

O sea que este tema es muy práctico. De cara a la unidad 2, es importante que lo recuerden, y de hecho seguramente tendrán que volver a lo mejor atrás cuando... Para repasarlo. O sea que lo vean en plan práctico, como lo hemos explicado, en ejercicios resueltos incluso del libro, y haciéndolo ellos, repitiendo ese mismo ejercicio que ya está resuelto, con lápiz y papel para seguir los pasos.

Bien Teresa, pasamos ahora entonces al tema tercero, que trata de combinatoria. ¿Qué fallos se suelen observar? En este tema, el objetivo principal es estudiar las distintas colecciones que se pueden formar con los elementos de un cierto conjunto. Según la manera de formar estas colecciones, tenemos un caso que puede ser variaciones, combinaciones o permutaciones.

Este tema deben estudiarlo pensando principalmente en los ejemplos prácticos, y para ello deben saber distinguir cuándo es una variación, cuándo es una permutación, cuándo es una combinación. Sí, porque se les da un problema y ellos dicen, ah, ya sé que esto trata de combinatoria, pero luego se lían al saber exactamente qué es un ordeno combinatorio. Entonces, deben pensar, al formar estas agrupaciones importa el orden, si importa el orden, por el tipo de problema que sea, es un caso de variaciones.

Las permutaciones es un caso particular de variaciones. Las permutaciones de M elementos es un caso particular. Son las variaciones de M elementos tomadas de M en M . Es M factorial.

M por $M-1$ por $M-2$, etc. Hasta 1. Hasta 1. Si no importa el orden, son combinaciones. Dentro de esto puede ser que se repitan o no se repitan.

Serían variaciones con repetición, o en el libro no viene con variaciones con repetición. Existen, pero a este nivel no se sirve. Bueno, entonces, deben saber las fórmulas para, primero distinguirlo, luego saber las fórmulas para aplicar a problemas.

En las demostraciones sí conviene que miren las propiedades de los números combinatorios, porque con estas propiedades luego, más adelante, se construye el llamado triángulo de Tartaglia. Es una construcción que tiene en la página 77. Que venga a ser una pirámide de números.

Sí, es un triángulo en el cual está formado por una serie de filas, filas que empiezan y acaban por unos. En la página 77, la última fila, por ejemplo, representa los números combinatorios del 5. Esto lo utilizan luego para la siguiente pregunta, que es el binomio de Newton. El binomio de Newton es una fórmula mediante la cual desarrollan un binomio elevado a cualquier potencia natural.

Esta fórmula tienen que saberla aplicar. Y para ello, hacer este triángulo, que les digo que es muy sencillo, y se aplica directamente en la fórmula. Sí, o sea que lo que hay que hacer es, digamos, que sería un ejercicio muy útil.

Ellos están viendo el triángulo de Tartaglia. Lo que podrían hacer es, perfectamente, seguir con la misma lógica, deduciendo los números que faltan en la página 77, donde están las líneas de puntos. Solo tienen que fijarse que cada fila se construye con la de arriba.

La fila que tiene en última está del 5. Tiene primero un 1. Siempre empieza y acaba por 1. Primero está el 1, luego tiene un 5. Ese 5 viene de la suma de los dos números que tiene arriba, un 1 y un 4. Luego viene un 10. El 10 viene de la suma de los dos números de arriba, un 4 y un 6. Y así sucesivamente. O sea que cada número se pone abajo, pero que está en el centro de dos que están encima.

Así es muy fácil deducir todas las filas que faltarían en el triángulo de Tartaglia. Y eso es muy importante, como ha explicado la profesora Teresa Eulessia, porque es la teoría que hay que comprender para luego poner el binomio de Newton, que tiene mucha aplicación en

problemas. Del binomio de Newton es fundamental aprenderse la fórmula y aplicarlo a problemas.

Hay ejemplos en el libro. Y ya terminamos con esta lección recordando que, por favor, es muy importante la cuestión del orden para saber distinguir si se trata de variaciones o de combinaciones. Bueno, y entonces ya pasamos a la lección última de esta primera unidad didáctica, que es la lección cuarta.

El tema 4, que es la probabilidad. Este tema debe verlo, como el anterior, a nivel completamente práctico. Para ello, los tipos de problemas les van a dar unos sucesos y deben calcular sus probabilidades.

Es fundamental, entonces, que utilicen una serie de fórmulas, que vamos ahora a decirlas, que están extraídas de todo el tema, pero que son las fórmulas que más van a utilizar, las más importantes. Una primera fórmula es calcular la probabilidad de un suceso contrario a uno dado. Esta fórmula tienen que utilizar siempre que les piden la probabilidad de, por ejemplo, no sacar un 3 al lanzar un dado.

O la probabilidad de, al lanzar 5 monedas al aire, sacar al menos 2 caras. Entonces, siempre que tengan un no o un al menos 1 o al menos 2, deben utilizar esta fórmula. Claro, porque lo que les están pidiendo es el suceso contrario.

Contrario. El suceso contrario al que se da. La fórmula es la probabilidad de un suceso es igual a uno menos la probabilidad del contrario.

Entonces, para este tipo de problemas que hemos dicho, es más fácil, más que calcular el suceso en sí, calcular el contrario y restar. Restar de uno. De la unidad.

Eso es. O sea, que sería, probabilidad, por ejemplo, para que ellos lo vean, probabilidad de A. Probabilidad de A con el guión encima que significa... Con una rayita encima que significa el suceso contrario. También utilizan la notación E menos A. El contrario de A es E, que es el total, menos el A. Eso es.

E menos A. Si utilizamos esa notación, por ejemplo, que es poniendo la rayita encima, sería probabilidad, y abrimos paréntesis, A mayúscula con una rayita encima, que es probabilidad del suceso contrario a A, igual a uno menos probabilidad de A. Uno menos probabilidad de A. Esta es la fórmula que acaba de explicar el profesor. Un ejemplo podría ser, si dicen, calcular la probabilidad de al lanzar una moneda al aire seis veces sacar al menos una cara. Esa probabilidad es igual a uno menos no sacar ninguna.

Entonces sería uno menos la probabilidad de no sacar ninguna. No sacar ninguna es más fácil que calcular la probabilidad de sacar dos o tres o cuatro o cinco o seis. Bueno, bien.

Entonces, probabilidad del suceso contrario igual a uno menos la probabilidad del suceso. Esa es la fórmula. ¿Otro tipo de fórmula que vamos a dar? La probabilidad de la unión de dos

sucesos.

Si les piden calcular la probabilidad de que se dé un suceso u otro suceso, están hablándoles de la unión de sucesos. O significa unión. En ese caso, tienen que utilizar la siguiente fórmula.

Probabilidad de A unión B es igual a la probabilidad de A más la probabilidad de B menos la probabilidad de A intersección B. Esta fórmula, en el caso de que los sucesos sean disjuntos, no se puedan dar a la vez, sean incompatibles, se llama, la probabilidad de A intersección B es cero. Y queda la fórmula. La probabilidad de la unión de dos sucesos, es decir, probabilidad de que se dé un suceso o el otro, es igual a la probabilidad de un suceso más la probabilidad de otro.

Esta fórmula la van a tener que utilizar mucho y es importante que la manejen bien. Sí, vamos a repetirla y recordar. Si tenemos dos sucesos que se ponen con mayúsculas, los sucesos A mayúscula y B mayúscula.

La probabilidad de A unión B, de la unión de esos sucesos, es igual a la probabilidad del uno más el otro, más la probabilidad del otro, es decir, probabilidad de A más probabilidad de B, menos la probabilidad de la intersección de ambos sucesos. O sea, menos probabilidad de A intersección B. Es la probabilidad de que se den a la vez ambos sucesos. Exactamente.

Si recuerdan bien lo que era el concepto de intersección, pues ahí lo ven. La intersección de dos sucesos está formada por los elementos comunes. Eso es.

Y entonces, ¿un tercer tipo de fórmula? Un tercer tipo sería precisamente para calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos, la probabilidad de que se den a la vez esos sucesos. La probabilidad esta, la probabilidad de A intersección B, es igual a la probabilidad de A por la probabilidad de B. Puede ser que estos sucesos A y B sean independientes, que el realizar uno no dependa del otro, no tengan nada que ver. Por ejemplo, si estamos hablando de extraer dos bolas de una urna, que hay una serie de bolas, y la segunda extracción se hace devolviendo la primera.

En ese caso, que es un caso de extracción con reemplazamiento, la segunda extracción no depende para nada de la primera extracción. Son sucesos independientes. Naturalmente, porque tenemos el mismo número de bolas que al principio.

Las circunstancias en las otras extracciones son las mismas. Entonces, en ese caso, la probabilidad de A intersección B es igual a la probabilidad de A por la probabilidad de B. Ahora, en el caso de que los sucesos sean dependientes, que puede ser el ejemplo de las bolas, cuando la primera bola extraída no se devuelve antes de hacer la segunda extracción, en ese caso, al hacer la segunda extracción, depende lo que ya hayamos sacado en la primera. Es una posibilidad menos el que salga esa bola que ya está fuera.

Entonces son sucesos, se llaman sucesos dependientes. En ese caso, la probabilidad de que se dé A intersección B, que se dé A y B a la vez, es igual a la probabilidad de A por la probabilidad

de B condicionado a A. La probabilidad de B condicionada significa la probabilidad que se dé el suceso B, supuesto que se ha cumplido el suceso A. Esa fórmula es muy importante y forma parte de una fórmula más complicada que viene al final del tema, que es el teorema de Bayes, que es el cálculo de probabilidades condicionadas. Y además, bueno, la cuestión de la probabilidad condicionada gráficamente se representa como probabilidad, se abre paréntesis, B, una rayita como de dividir A, B rayita A, pues quiere decir probabilidad de B condicionado A. Y repetimos esta fórmula, cuando los sucesos son dependientes entre sí.

Probabilidad de A intersección con B, igual a probabilidad de A por probabilidad de B, por probabilidad de B condicionado a A. Esa última expresión de la fórmula la tienen en la página 101 del libro, donde tienen también unos ejemplos sencillos sobre ello. Bueno, pues yo creo que con esto ponemos punto final y gracias Teresa Ulecia hemos explicado conceptos muy puntuales, pero importantes, que fallan mucho los alumnos que se ven los exámenes y que es una pena, porque son fáciles de entender, referidos a los cuatro temas de la primera unidad didáctica. En el próximo programa de esta asignatura, lo consultáis en la guía de los medios audiovisuales, haremos lo mismo que hoy, comentar dificultades, pero de los temas de la segunda unidad didáctica.

Nada más, gracias por vuestra atención y buenas noches. La asignatura a matemáticas especiales dentro del curso de acceso pone por hoy punto final a la programación de la UNED. Las ciencias económicas, la política y la sociología y la filosofía, junto a una de las asignaturas del curso de acceso, han sido hoy protagonistas.

Mañana estaremos de nuevo con vosotros, será a través de la psicología y de las ciencias de la educación. El curso de acceso, por su parte, iniciará el curso de francés con la primera lección del método. Recordad que nuestra próxima cita es mañana a partir de las 9 y 5 de la noche.

Hasta entonces, gracias por la atención que nos habéis prestado y hasta mañana. ¡Gracias! ¡Gracias! Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org