

AC 15 14

Matemáticas especiales, título, base y dimensión, emisión 18, autores, Joaquín Abeger, Montiaquito y otros. Vamos a empezar la emisión de hoy haciendo un breve repaso de lo visto en la lección anterior. Estoy de acuerdo en volver sobre los conceptos de dependencia e independencia lineal, ya que estos conceptos me parecen excesivamente abstractos.

Bien, vayamos por partes a ver si conseguimos aclarar estas ideas. ¿Cuál es la idea que tienen ustedes acerca de lo que es un sistema de vectores de un espacio vectorial? Usted. Opino que un sistema de vectores será cualquier conjunto de elementos de un espacio vectorial.

Eso está bien, pero dado que en la construcción de espacio vectorial empleamos dos estructuras distintas, un grupo abeliano y un cuerpo, ligados por una ley externa, señorita, ¿a cuál de estos dos conjuntos pertenecen los vectores? Los vectores son los elementos del grupo abeliano, mientras que a los elementos del cuerpo creo recordar que los llamábamos escalares. Así es, de acuerdo, entonces está claro que cualquier subconjunto de un espacio vectorial forma lo que llamamos sistema de vectores. Veamos ahora si recuerdan lo que es una combinación lineal de vectores del espacio.

Bueno, si por ejemplo tenemos varios vectores del espacio, a cada uno de los cuales le aplicamos la ley externa, multiplicándolos por un escalar, obtendremos otros vectores. Antes de seguir adelante podríamos hacernos las siguientes preguntas. ¿Son estos vectores siempre distintos de los anteriores? ¿Estos vectores de los que partimos son también necesariamente distintos entre sí? Creo que puedo responder yo a esa pregunta.

A ver. Lo que había hecho mi compañero era coger simplemente un conjunto cualquiera de vectores sin ninguna restricción sobre si eran iguales o no. Igualmente el conjunto de escalares utilizado no está sujeto a ninguna condición.

En particular, si alguno de esos escalares fuera el elemento unidad del cuerpo, el vector que fuera multiplicado por él no variaría. Por consiguiente, si todos los escalares utilizados fueran el elemento unidad, el conjunto de vectores obtenido sería el mismo que el original. Muy bien.

¿Puede usted, por favor, puede seguir hablando de lo que es una combinación lineal? Sí. Habiendo partido de un conjunto cualquiera de vectores y otro cualquiera de escalares, habíamos obtenido un nuevo conjunto de vectores. Estos nuevos vectores pueden ser operados mediante la ley interna del grupo para obtener un nuevo vector.

De este nuevo vector diremos que es una combinación lineal de los vectores del conjunto de partida. De acuerdo. Se dice, además, que ese nuevo vector depende linealmente del sistema de vectores de partida.

Podemos decir esto de otra manera. Consideremos un conjunto de vectores cualquiera. Supongamos que alguno de los vectores de ese conjunto se puede expresar como combinación

lineal de los demás.

Es decir, que existen unos escalares tales que, al multiplicar cada uno por un vector del sistema y operar el resultado entre sí, nos dará el vector que depende de ellos. ¿No es esto, profesor, lo que llamábamos un sistema de vectores ligado? Exacto. También le llamábamos sistema de vectores linealmente dependientes.

Bueno, recordemos ahora lo que es un sistema de vectores linealmente independientes. Un sistema de vectores será linealmente independiente cuando ningún vector del sistema se puede poner como combinación lineal de los demás. Estupendo.

A estos sistemas de vectores les llamaremos también sistemas de vectores libres. Podemos recordar ahora cómo caracterizábamos los sistemas ligados y libres. Decíamos que un sistema de vectores es libre cuando cualquier combinación lineal de ellos, igualada al vector cero, sólo se verifica si los escalares utilizados en la combinación son todos necesariamente ceros.

¿Podría explicar un poco más esto, profesor? Sí, cómo no, muy bien. Supongamos que tenemos un sistema de vectores formado por un único vector distinto de cero. Podríamos encontrar una combinación lineal, o sea, un producto de la forma λx , siendo λ un escalar cualquiera, y x el vector que forma el sistema, tal que al igualarlo a cero fuera λ distinto de cero.

Evidentemente no. Si x es distinto de cero, para que el producto λx sea cero, es necesario que λ sea igual a cero. Naturalmente, de acuerdo.

¿Cómo será entonces el sistema formado por ese vector x distinto de cero? Por lo que usted dijo antes, será un sistema libre, ya que cualquier combinación lineal de vectores igualada a cero implica que el escalar utilizado sea cero. Si el vector x fuese igual a cero, ¿sería el sistema libre? Bueno, en este caso, en el producto λx , al ser x igual a cero, λ puede ser distinto de cero, o sea, que no sería un sistema libre. Esta propiedad podemos extenderla a un sistema con un número cualquiera de vectores, y decir que si el sistema contiene al vector cero, es un sistema ligado.

Extendiendo el concepto de sistema libre para el caso de un conjunto cualquiera de vectores, vemos como al comienzo, que un sistema de vectores es libre cuando cualquier combinación lineal del sistema igualada a cero implica que los escalares utilizados son necesariamente todos nulos. Profesor, ¿todo sistema de vectores que no es libre será ligado? Efectivamente. Un sistema que no cumpla la condición anterior será un sistema ligado.

O sea, basta con que uno cualquiera de los escalares de la combinación lineal del sistema igualada a cero sea nulo para que el sistema sea ligado. Bueno, creo que podríamos avanzar algo más en la teoría. Sí, estoy de acuerdo.

Esto ha quedado claro. Bien, intentemos ahora definir lo que es un sistema de generadores del espacio vectorial. Supongamos un sistema de vectores y formemos una combinación lineal

entre ellos.

El resultado, como sabemos, es un vector del espacio. Si ahora formamos otra combinación lineal con el mismo sistema, variando los escalares, obtendremos un vector distinto del anterior. Repitiendo sucesivamente este mecanismo, obtendremos distintos vectores del espacio vectorial.

¿Ven ustedes este proceso? Sí, es el de formar combinaciones lineales distintas de un sistema de vectores dado. De acuerdo, sigamos. Supongamos que hacemos todas las combinaciones lineales posibles con el sistema de partida.

Se puede demostrar que el conjunto de vectores obtenido es un subespacio vectorial del espacio vectorial de partida. Profesor, creo que no nos ha dicho hasta ahora lo que es un subespacio vectorial. Efectivamente, pero tengan ustedes en cuenta que estas emisiones son únicamente un complemento de la asignatura y deben, a la vez que escuchan la emisora, repasar con más detalle los conceptos en su libro de texto.

Por esta razón, muchas veces no explicamos exhaustivamente los temas. De todas formas, vamos a definir brevemente el concepto de subespacio vectorial. Diremos que, dado un espacio vectorial E sobre un cuerpo K , un subconjunto H de E es subespacio vectorial de E si H es, a su vez, espacio vectorial sobre el mismo cuerpo K con las mismas leyes definidas.

Entonces, el conjunto de todas las combinaciones lineales que podemos hacer con el sistema de vectores dado es un subespacio vectorial. Eso es. Diremos ahora que el sistema de vectores con el cual obteníamos el subespacio vectorial es un sistema generador de dicho subespacio.

¿Habrá algún sistema de vectores con el cual podamos obtener todo el espacio vectorial? Desde luego. Este es un caso particular del anterior, ya que todo espacio vectorial es subespacio de sí mismo. Ahora estamos en condiciones de definir uno de los conceptos más importantes de los espacios vectoriales, el concepto de base.

Diremos que un sistema de vectores de un espacio vectorial es una base de dicho espacio cuando se cumple que, primero, el sistema de vectores es libre y, segundo, el sistema de vectores es un sistema generador de todo el espacio. Por esta definición entiendo que puede haber varias bases distintas en un espacio vectorial. En efecto, señorita, es una pregunta interesante.

Cualquier sistema del espacio que cumpla las dos condiciones anteriores es una base de dicho espacio. Podrían ustedes también plantearme si toda base posee el mismo número de vectores o no. Se puede demostrar que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

¿Cuál es la ventaja de encontrar bases en un espacio vectorial? La ventaja es que con un pequeño número de vectores podemos construir todo el espacio y sólo tendremos que manejar los vectores de la base. Se puede demostrar también que el máximo número de

vectores libres de un sistema de vectores de un espacio vectorial es el número de vectores de cualquiera de las bases. Entonces, si el número de vectores de cualquier base es 3, el número máximo de vectores libres es también 3, ¿no? Claro.

Bien, y al número de vectores de cualquiera de las bases de un espacio vectorial se le llama dimensión del espacio. En el ejemplo de mi compañero la dimensión del espacio sería 3. Efectivamente. Ya que el número de vectores de la base puede ser cualquiera, ¿puede darse el caso de que este número sea infinito? Desde luego.

Y a estos espacios cuya base tiene infinitos elementos les llamaremos espacio de dimensión infinita. En el presente curso nos limitaremos a los espacios de dimensión finita, en particular los de dimensión 2 y 3. Bien, con esto acabamos el tema de espacios vectoriales de importancia fundamental para cualquier alumno que quiera estudiar a fondo los temas de álgebra lineal. Dada su dificultad de importancia, en una próxima emisión volveremos sobre este tema.

Y como siempre, les recomendamos que todos estos conceptos los revisen en su libro de texto, en el cual encontrarán las demostraciones en las que, por el carácter radiofónico de estas emisiones, no hemos creído conveniente pararnos en ellas.