

AC 10 103

Hola, un saludo y bienvenidos a este tiempo de noticias. radio que la UNED dedica a los alumnos del curso de acceso directo. De lunes a viernes les acompañamos con orientaciones y entrevistas de todas y cada una de las asignaturas que conforman el curso de acceso y que les permitirán acceder a la carrera universitaria de su elección.

Quiero recordarles la importancia de consultar las dos guías que tienen en su poder. La guía del curso en la que se encontrarán toda la información relativa a las distintas asignaturas, horarios de consulta, programas, fechas de examen y la guía de medios audiovisuales donde se pueden consultar los días y horas de emisión de los distintos programas así como las colecciones de audio casete y videocasete de contenido didáctico. Esta noche en nuestro programa la dedicaremos a dos asignaturas.

En la primera parte matemáticas básicas, en la segunda introducción a las ciencias políticas y vamos a comenzar con matemáticas básicas en la compañía del profesor Eduardo Ramos con el que hablaremos de conjuntos, aplicaciones y funciones. Esta noche en matemáticas básicas nos acompaña el profesor Eduardo Ramos. Muy buenas noches.

Muy buenas noches y un saludo cordial a nuestros estudiantes. Vamos a ver las lecciones 17, la matemática de los conjuntos, aplicaciones y funciones. Buena parte de los problemas que se plantean no pueden ser resueltos en términos estrictamente numéricos.

En el pensamiento matemático se han incorporado muchos conceptos más allá de los números. En este capítulo y en el siguiente se examinan algunos de ellos. Los conjuntos, sus operaciones, sus relaciones y sus transformaciones.

¿Qué podemos para empezar comentar sobre esto? Sí, estas lecciones hacen referencia o estudian aquello que se llama en matemáticas los fundamentos, es decir, lo más básico. Es aquella parte de las matemáticas que tiene una vocación de ayuda a las demás ciencias. Intenta englobar dentro de unos cuantos, unos pocos conceptos básicos, una serie de métodos y de procedimientos que pueden ser utilizados por otras disciplinas como la física, la economía o incluso las ciencias de la naturaleza.

Es su vocación, la vocación que tienen las matemáticas de su proyección hacia el mundo exterior. Entonces estas lecciones, que son un poco teóricas, son un poco de concepto, nos sirven para reflexionar en abstracto sobre ideas y de alguna manera cumplen, se acercan mucho o sirven de una manera muy especial para cumplir uno de los objetivos que tiene este curso que es despertar en nuestros alumnos los aspectos de rigor intelectual, el afán por razonamiento abstracto, el interés por razonamiento abstracto, etc. ¿Cuáles son los conceptos básicos de la teoría de los conjuntos? Sí, en la teoría de conjuntos se parte como conceptos primitivos de dos ideas, que es la idea de conjunto y la idea de elemento.

Conjunto y elemento son dos cosas que no se definen, porque cualquier definición hace

referencia a algo similar. Por ejemplo, podemos decir que un conjunto es una colección de objetos, pero habría que preguntarse entonces qué es una colección. Entonces, entre conjunto y elemento se da por sabido, se entiende que todo el mundo tiene una idea intuitiva de lo que es, y la relación clave que hay entre conjunto y elemento es la relación de pertenencia.

Siempre se puede decidir si, dado un elemento y dado un conjunto, el elemento pertenece o no pertenece al conjunto. Dejamos al margen, aunque en los últimos años en la historia del pensamiento han aparecido algunas teorías sobre conjuntos borrosos o conjuntos difusos en los que la noción de pertenencia no es tan tajante como estamos considerándola aquí, de sí o no, de pertenece o no pertenece. De eso digo estas ideas de conjuntos borrosos que están por ahí circulando en el pensamiento matemático actual.

Sin embargo, la teoría de conjuntos que tenemos aquí es una teoría booleana, es una teoría de sí y no, una teoría de dos valores, de pertenece o no pertenece. Y esto, en esta teoría, se considera que es algo que se puede decidir siempre, si un elemento pertenece o no pertenece al conjunto. Entonces, esas ideas de conjunto-elemento y relación de pertenencia son los primeros ladrillos para construir esta teoría de conjuntos.

Luego, hay algunas cosas que podemos decir, por ejemplo, cómo se puede definir un conjunto, que también es un problema que tiene su trascendencia. Entonces, la manera más evidente, más sencilla, es enumerando todos los elementos del conjunto, citándolos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, por ejemplo. Pero también se puede dar alguna propiedad que caracterice esos elementos.

La enumeración de los conjuntos se podría hacer de otra manera, por descripción de la propiedad, citando la propiedad que describe esos conjuntos, que los incluye a todos, también sería otra manera de definir el conjunto, de determinar el conjunto. Por ejemplo, podemos decir por descripción el conjunto de vocales del español, que por enumeración serían a, e, i, o, y, u. Otra idea clave en esta teoría de conjuntos es la idea de igualdad de conjuntos. Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Aunque esto parece como una trivialidad, ya nos empezamos a familiarizar con la teoría, cómo se construyen las matemáticas. Solo hemos considerado no definido el concepto de conjunto y elemento. Y ahora ya empezamos a construir con esos dos ladrillos básicos, como decía, toda la teoría, y empezamos a decir cosas que son razonables, pero hay que definirlas.

Entonces, decimos o definimos que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Otra idea que también es importante en esta teoría es la idea de inclusión de conjuntos. Es decir, cuando un conjunto está contenido en otro.

Se dice o se define, se dice que un conjunto está contenido en otro si todo elemento del primer conjunto es elemento del segundo conjunto. Se puede hablar de que el conjunto, el pequeño, es un subconjunto del grande. Se escribe con un símbolo que parece una C, que es ya familiar para los alumnos que han manejado el libro de texto.

Y en esta teoría de conjuntos tenemos tres, aparte de lo que he dicho, igualdad e inclusión otros tres conceptos básicos también, que son el conjunto universal, en la teoría se considera un conjunto en el cual están englobados como subconjuntos todos los que se consideren en un momento dado, el conjunto vacío, que no contiene ningún elemento, y el conjunto de las partes de un conjunto, que es el conjunto cuyos elementos son subconjuntos del conjunto dado. Entonces, en resumen de lo que acabo de decir es, ideas básicas, conjunto, elemento y relación de pertenencia, maneras de describir un conjunto, de definir un conjunto por enumeración o por descripción, y luego las definiciones de igualdad de conjuntos, inclusión de conjuntos, conjunto universal, conjunto vacío y conjunto de las partes de un conjunto. Bien, y los conjuntos pueden ser combinados mediante operaciones que se parecen a las de los números.

¿Cuáles son estas operaciones y cómo se realizan? Sí, un paso más, una elaboración más, una vez que tenemos los conjuntos considerados individualmente, podemos, como acabas de decir muy bien, combinarlos o operarlos. Entonces, entre conjuntos pueden definirse tres operaciones, la intersección, la unión, la complementación, tres operaciones básicas, y algunas que son combinaciones de ellas, como puede ser la diferencia, que ahora citaremos. ¿Cómo se define la intersección? Debemos fijarnos una vez más.

Vamos definiendo los nuevos conceptos a partir de los que ya tenemos previamente definidos. La intersección de dos conjuntos se define como un nuevo conjunto que está integrado por los elementos que están simultáneamente en los dos conjuntos. Dados los conjuntos A, B, la intersección de A y B está formada por los elementos que pertenecen a la vez a A y a la vez a B. La unión de conjuntos se define como aquel nuevo conjunto que los elementos son los que están o bien en A, o bien en B, o bien en ambos.

Es decir, dados los dos conjuntos A y B, los elementos del conjunto A unión B son aquellos que pertenecen a A, pertenecen a B, o pertenecen a ambos. Y el complementario de un conjunto, que es la tercera operación que consideramos, hace referencia, por eso hemos hablado de que era un concepto clave, al conjunto universal. Es decir, el complementario de un conjunto es un nuevo conjunto que está formado por aquellos elementos que no están en el conjunto dado.

Es decir, el complementario de un conjunto A es un nuevo conjunto que se puede representar con una A y una C arriba, como exponente, en el cual están los elementos que no pertenecen a A. Estas, ya digo, son las operaciones básicas. De ellas se puede deducir una operación que es bastante intuitiva, que es la diferencia de conjuntos A menos B. La diferencia de dos conjuntos A y B se define como la intersección de uno de ellos con el complementario del otro. Es decir, A menos B es igual al conjunto A intersección B complementario.

Como vemos, la diferencia es una operación derivada de la combinación de dos operaciones, la complementación de B y la intersección con el conjunto dado. Las operaciones con conjuntos tienen una serie de propiedades. ¿Cuáles son estas? Esta es una de las cosas divertidas que tiene esta teoría.

Con pocas definiciones y con unas ideas intuitivas y simples como son las que estamos citando

hasta el momento, la idea de intersección de conjuntos, la idea de unión de conjuntos y la complementación de conjuntos, podemos inmediatamente deducir una serie de cosas que son de sentido común, que caen por el razonamiento lógico. Voy a citarlas y con la idea de que los alumnos se las trabajen y se las estudien y las conozcan y sepan cómo se llegan a ellas. La intersección, ¿qué propiedades tiene? Podemos citar las siguientes.

Primera, la intersección de un conjunto consigo mismo es el propio conjunto. Es decir, si A se interseca con A , si se buscan los elementos que están en A y en A , pues, lógicamente, se consigue el propio A . Segunda propiedad, la intersección de cualquier conjunto con el conjunto vacío es igual al conjunto vacío. Es decir, no hay elementos comunes en el vacío y en ningún conjunto, puesto que el vacío no tenía elementos.

Tercera propiedad, la intersección de un conjunto cualquiera con el conjunto U , el conjunto universal, es el propio conjunto. Evidente, porque el conjunto A tiene todos sus elementos dentro de U . La cuarta propiedad, la intersección de conjuntos es conmutativa. Es decir, da lo mismo intersecar A y B que intersecar B y A . A intersección B es lo mismo que B intersección A . Quinta propiedad, la intersección es un conjunto que está contenido en los dos conjuntos que se intersecan.

Es decir, la intersección de A y B está a la vez contenido en A y contenido en B . Y la sexta propiedad que podemos citar de la intersección es que si un conjunto está contenido en otro, es decir, si B , por ejemplo, está contenido en A , la intersección de A y B es el pequeño, es el contenido, es el conjunto B . Lo cual también parece intuitivo. Esto es lo que hace referencia a la intersección. En la unión tenemos también unas propiedades muy análogas.

Las cito también por hacer un poco de repaso e intentando que los alumnos se las trabajen y piensen sobre ellas. Primera, es que la unión de dos conjuntos, perdón, la unión de un conjunto consigo mismo es el propio conjunto. La segunda es que la unión de un conjunto con el conjunto vacío es el propio conjunto A . A unión vacío igual A . La tercera es que la unión del conjunto A con el conjunto universal U es todo el conjunto U . La cuarta, que la unión es conmutativa, es decir, A unión B es lo mismo que B unión A . La quinta, que la unión contiene a los dos conjuntos que se están uniendo.

A está contenido en A unión B y B también está contenido en A unión B , cualquiera que sea los conjuntos A y B . Y finalmente, si un conjunto B está contenido en un conjunto A , la unión de los dos es el propio conjunto A . Y finalmente, para la complementación tenemos algunas propiedades también bastante intuitivas y bastante fáciles de comprobar. Como son, por ejemplo, que el complementario del conjunto vacío es el propio conjunto universal. Como son, que a su vez el complementario del conjunto universal es el conjunto vacío.

Y finalmente, que el complementario del complementario, es decir, si se hace la operación de complementación dos veces, se vuelve al propio conjunto A . Bueno, no quiero extenderme más, aunque ahora en el texto se estudian y se comprueban y se razonan algunas propiedades que hacen referencia a varias operaciones a la consideración de dos o tres operaciones a la vez,

la unión, la intersección y la complementación. En particular, las conocidas leyes de Morgan que hacen referencia al complementario de la unión y al complementario de la intersección. Recomiendo que los alumnos trabajen y se familiaricen con este tipo de propiedades.

Bien, con esta recomendación vamos a pasar a las representaciones gráficas que ayudan a entender los conceptos y a resolver problemas. Los conjuntos suelen representarse mediante dibujos denominados diagramas de Venn. ¿Cómo se representan los conjuntos mediante estos diagramas? Sí, un diagrama de Venn es una cosa muy sencilla.

Simplemente consiste en una especie de círculo cuadrado, una figura más o menos irregular que encierra a los elementos de un conjunto. Con ayuda de esta representación visual los conceptos de unión, intersección, complementación, las operaciones derivadas y todas estas propiedades que hemos estado comentando, hacen aparente a los ojos. Debo advertir que las demostraciones basadas en representaciones visuales ni matemáticas no son válidas.

Las demostraciones y la comprobación de las propiedades que se anuncian tienen que hacerse siempre matemáticas recurriendo a la definición, que es lo que no engaña. A veces los ojos nos pueden llevar a falsas interpretaciones. Pero, desde luego, mediante estas representaciones gráficas nos podemos apoyar para descubrir por dónde va el camino que nos conduce a la solución del problema que tenemos planteado.

Por último, para acabar este tema 6, ¿qué es el cardinal de un conjunto? De un conjunto, además de estas operaciones que hemos hecho, se puede conseguir algo que es clave, que es capital, que es el número de elementos que lo integra. A ese número de elementos que integra un conjunto se le denomina en matemáticas el cardinal del conjunto A . Son bastante frecuentes y en esta lección hay varios ejercicios de averiguar cardinales de conjuntos, que hacen referencia a cuántos elementos verifican tal o cual u otra propiedad. Para esto hay una serie de... hay una fórmula, fundamentalmente, que es la que da el cardinal de la unión de dos conjuntos, que es igual a la suma de los cardinales de los conjuntos que se están uniendo menos el cardinal de la intersección.

Es decir, el cardinal de la unión de un conjunto es igual al cardinal... perdón, el cardinal de la unión de dos conjuntos A y B es igual al cardinal de A más el cardinal de B menos el cardinal de la intersección de A y B . Con esta fórmula, y con la ayuda de Gramaldebén, se pueden resolver multitud de problemas de planteamiento frecuente que hacen referencia a averiguar cuántos elementos verifican tal o cual propiedad. Bien, pues podemos pasar ya al capítulo 7, que habla de aplicaciones y funciones. Cualquier disciplina científica estudia las transformaciones.

El concepto matemático de transformación o cambio se denomina aplicación o función. Hay ejemplos que nos pueden aclarar este concepto de transformación. Podríamos poner alguno.

Bien, además de estudiar los conjuntos en sí mismos, o unidos o intersecados con otro, como hemos hecho en la lección anterior, hay una nueva faceta, una nueva manera de contemplar los problemas que se pueden plantear entre dos conjuntos, que es el problema de transformar,

de cambiar. De hecho, multitud de cosas en la vida, multitud de actividades son actividades de cambio. Y de hecho, muchas ciencias estudian los problemas que se presentan cuando el entorno, las cosas, el objeto científico cambia.

Por ejemplo, la física estudia el movimiento de los cuerpos, en definitiva, el cambio. La psicología estudia la modificación de la conducta de los individuos, es decir, el cambio. La economía estudia los cambios en los patrones económicos, en las actividades económicas, en las pautas de comportamiento de los individuos en su faceta económica.

En definitiva, hay muchos problemas en la vida que son problemas de cambio, de transformación de un conjunto en otro conjunto. Entonces, esa es la esencia de una transformación. Se necesita saber cuál es el conjunto inicial, cuál es el conjunto final.

Saber el conjunto inicial quiere decir saber qué elementos lo integran. Saber el conjunto final quiere decir saber qué elementos lo integran. Y luego, saber cómo es el cambio, es decir, quién se cambia en quién, quién se transforma en quién.

Con esas tres cosas, es decir, conjunto inicial, conjunto final y una relación. Algo que nos diga cómo se transforma cada elemento del conjunto inicial en el conjunto final. Tenemos una pauta de conducta, una pauta del estudio de las transformaciones, de los cambios.

Creo que ha quedado claro lo que es una transformación, y ya se ha dicho que la aplicación es una clase de transformación. Pero, ¿se puede aclarar algo más y ampliar el concepto de aplicación? Sí. Una aplicación es una transformación con una característica peculiar, que es que a cada elemento de una aplicación entre dos conjuntos A y B es una transformación que a cada elemento del primer conjunto A le hace corresponder un único elemento del segundo conjunto.

Entonces, hay dos ideas que son importantes. Uno, que todos los elementos del primer conjunto tienen alguno relacionado con ellos en el segundo conjunto, y que tienen uno solo. Si ahí nos dan una transformación, nos presentan una transformación en la que hay elementos del primer conjunto, de los que no tienen ninguno relacionado con ellos en el segundo, o hay elementos en el primer conjunto que tienen más de uno relacionado con ellos en el segundo, eso no es una aplicación desde el punto de vista matemático.

Es decir, que una aplicación tiene que tener un elemento en el segundo conjunto y solo uno. Todo elemento del primer conjunto tiene que tener relacionado con él uno en el segundo conjunto y solo uno. Bien, ¿a qué se llama imagen e imagen inversa de un subconjunto? Bien, para responderte esa pregunta, necesito decir dos cosas primero.

Uno, que es la imagen de un elemento. Es decir, la imagen de un elemento, dado un elemento del primer conjunto, digamos A, es relacionado con él mediante la aplicación, por ejemplo, si le llamamos a la aplicación F, el F de A es un elemento del segundo conjunto que está relacionado con él. Eso es la imagen del elemento A, el F de A, que está relacionado con él.

Y también la preimagen de un elemento del segundo conjunto, digamos, si tenemos un

elemento B en el segundo conjunto, ¿eh?, un elemento del primer conjunto tal que esté relacionado con ese B es una preimagen de B. Hay que notar que aquí digo una preimagen porque efectivamente el concepto de aplicación no impide que un elemento del segundo conjunto sea imagen de valor del primer conjunto. Entonces, eso a veces se escribe como que la preimagen de B se escribe como $F^{-1}(B)$, F elevado a menos uno de B. Se denota así en la escritura. Entonces, con esas dos ideas ya podemos inmediatamente generalizar a lo que es la imagen de un subconjunto y la imagen inversa de un subconjunto.

Si tenemos un subconjunto del conjunto original, entonces todos esos elementos tienen su imagen en el segundo conjunto. Todos los elementos de ese subconjunto tienen su imagen en el segundo conjunto. Bueno, pues ese subconjunto del segundo conjunto B que está integrado por todos los que son imagen de algún elemento del subconjunto dado, se le llama la imagen del subconjunto dado.

Intuitivamente, al revés. La imagen inversa de un subconjunto del segundo conjunto es el subconjunto del primer conjunto que está integrado por todos aquellos elementos cuyas imágenes van al conjunto dado. Son ideas bastante intuitivas, incluso su propia definición en terminología nos ayuda a comprender de qué estamos hablando.

Hay distintos tipos de aplicación. ¿Cuáles son? Bueno, ahora las aplicaciones en la teoría de estado de las aplicaciones se le dan nombres a las cosas por distinguirlas. Y por formalizar y por caracterizar de alguna manera algunas ideas que también tienen su interés.

En este consideramos tres definiciones o tres características o tres tipos que pueden cumplir o no cumplir una aplicación dada. Podemos considerar o decir que una aplicación es inyectiva. Si resulta que elementos diferentes tienen imágenes diferentes.

Lo que estaba diciendo antes. No impedía en ser aplicación el hecho de que dos elementos diferentes tuviesen la misma imagen. Si el elemento X y el elemento Y tuviesen una imagen común Z. Eso no lo impide el concepto de aplicación.

Cuando ocurre que todos los elementos del primer conjunto van a imágenes diferentes entonces se dice que la aplicación es inyectiva. Tampoco impide el concepto de aplicación que todos los elementos del segundo conjunto no sean imagen de alguno dado. Es decir, si el concepto de aplicación exige que todos los elementos del primer conjunto tengan imagen del segundo pero al revés no tiene por qué ocurrir.

Es decir, una transformación puede ser aplicación pero puede haber elementos del segundo conjunto que no sean imagen de ninguno. Bueno, pues cuando ocurre que todo elemento del segundo conjunto es imagen de alguno del primer conjunto se dice que la aplicación es sobreyectiva. Otra definición, otro término.

Y como resumen, cuando una aplicación es inyectiva y sobreyectiva a la vez se dice que es biyectiva. O una aplicación uno a uno. Identifica los dos conjuntos.

Bien, para acabar este capítulo, ¿se podría explicar a qué se denomina función y cómo se puede representar? Una función es una aplicación entre conjuntos de números en definitiva. Cuando el primer conjunto es un conjunto de números, números enteros números reales y el segundo conjunto también es un conjunto de números, números enteros números reales y hay una aplicación entre ellos se le llama por darle un nombre especial función. La representación de las funciones se puede hacer en un eje cartesiano.

Como se le parecían en su momento las rectas o los puntos. Considerando en el plano los puntos de la forma x , donde x son los elementos del primer conjunto y f de x . Pared de puntos perdón, pared de números x f de x . Estamos diciendo que una función es una aplicación entre dos conjuntos de números. Por tanto x es un número y f de x también.

Si consideramos ese par de números, sabemos por la representación cartesiana que estudiamos en geometría que eso representa un punto del plano. Cuando se consideran todos esos puntos se obtiene un subconjunto del plano que es la gráfica de la función. Puede ser una recta puede ser una curva o puede ser una figura cualquiera.

Ya debemos acabar pero antes de ello decir que estas dos lecciones, las 6 y las 7 también tienen su importancia. Repito el objetivo principal de estas dos lecciones es que mi experiencia suelen ser bastante fáciles o asumibles por los alumnos en este momento del curso, que es habituarles a la reflexión al razonamiento un poco en extrato, a familiarizarse con estos conceptos que estamos manejando unión, intersección propiedades de las operaciones el concepto de aplicación distinguir si algo es o no es aplicación el averiguar o el descubrir si una aplicación da sobreyectiva, inyectiva si es biyectiva poder hacer una representación gráfica de una función determinada a la función que hace corresponder a un número, por ejemplo el doble del número o el doble del número más uno familiarizarse con estas pequeñas cosas que son unas herramientas básicas en matemáticas, es el objetivo fundamental de esta lección. Entonces les digo que no suelen causar demasiadas dificultades a los estudiantes pero conviene dedicarles lógicamente un tiempo de reflexión.

Pues muchas gracias y hasta el próximo programa. Bueno, buenas noches de nuevo un saludo para todos nuestros alumnos.