

AC 15 25

Matemáticas Especiales, guión número 25, continuidad, emisión 30 de abril de 1980, autores Abeguer y cinco colegas. En la emisión de hoy trataremos de introducir un concepto fundamental para el estudio de las funciones, es el concepto de continuidad de una función en un punto. Veamos también cómo este concepto está íntimamente ligado con el del límite.

Veán ustedes ahora la función que está dibujada en la figura 11 de la apoyatura para esta emisión. ¿Podrían ustedes decirme cómo está definida esta función? Es una función definida para cualquier valor x de la recta real. Si x es negativo, la función vale menos uno.

Esto viene representado en la gráfica por la semirrecta paralela al eje x por debajo del mismo. En el punto x igual a cero, la función toma el valor cero, y para los valores de x estrictamente mayores que cero, la función, según vemos en la definición, toma el valor 1. Pues bien, a un nivel intuitivo podemos dar una primera idea de lo que significa que una función sea o no continua. Si seguimos los puntos de la gráfica con un lápiz desde menos infinito hasta más infinito, la gráfica para los valores negativos de x podemos dibujarla mediante un trazo continuo, es decir, sin levantar el lápiz del papel.

O sea, para valores próximos a cero, a la derecha y a la izquierda, no podemos dibujar la función de una forma continua. Diremos que esta función no es continua en cero. Entonces, cualquier función de este tipo en la que, para dibujar la gráfica, tengamos que levantar alguna vez el lápiz del papel, no es continua.

Efectivamente. En la figura 12 pueden ver otra función discontinua en el origen. Hemos dicho, para estas dos funciones, que eran discontinuas en el punto x igual a cero, pero, ¿y en los demás puntos en los que está definida? Según la noción intuitiva de continuidad que hemos expuesto, ambas funciones sólo son discontinuas en el origen, pues en los demás puntos del dominio de definición, según se ve en la gráfica, no existen saltos.

Por supuesto, esto no indica que otras funciones puedan tener más de un punto de discontinuidad. Vamos a ver ahora una definición más rigurosa del concepto de continuidad. Examinen la figura 13 de la apoyatura.

En primer lugar, vamos a repasar brevemente el concepto de límite. Como ustedes recordarán, y pueden ver en la figura 13, el decir que el límite de la función f , cuando x se aproxima a un punto a , es el b , quiere decir que hay infinitos puntos en la proximidad de a que tienen su imagen en la proximidad de b . O lo que es lo mismo, cuando la variable x se aproxima a a , los valores de las imágenes se van aproximando a b . Creo recordar también que decíamos que el punto a no tiene por qué pertenecer al dominio de la función, es decir, que dicha función no tiene por qué estar definida en a . Efectivamente, precisamente a este punto quería ir ahora. Tenga usted en cuenta que no sólo la función no tiene por qué estar definida en el punto a , sino que incluso puede estar definida y tomar un valor distinto al del límite, es decir, a b . Pues

bien, supongamos ahora, como se ve en el dibujo, que la función, además de tener límite en el punto a , está definida en dicho punto, y el valor de la función en ese punto es b . O sea, coincide con el valor del límite en ese punto.

¿Qué importancia tiene que la función esté definida en a , y que su valor sea precisamente el valor del límite b ? Vamos a ver el significado de éste. Por el hecho de tener límite la función cuando x tiende a a , sabemos que hay infinitos puntos en un entorno de a que tienen su imagen en un entorno de b . Es decir, que en las proximidades de a , a su derecha y a su izquierda, la función está dibujada sin saltos. Ahora, en general, esto no nos dice nada de lo que pasa en el punto a . Es decir, si en a , la función no estuviera definida, o si estuviera definida, pero con otro valor diferente al del límite.

Estos dos casos están expuestos en la figura 14 y 15 de la apoyatura escrita. En el caso de la función cuya gráfica está en la figura 13, la función está definida en a , y además el valor que toma en dicho punto es el del límite b . ¿Tendrá esta función algún salto en su gráfica en la proximidad de a , o en el mismo punto a ? Creo que no, ya que por tener límite cuando x tiende hacia a , sabemos que en las proximidades de a no tiene saltos, y como en el punto a está definida y su valor es el del límite, tampoco habrá un salto en dicho punto. Entonces, ¿cuál sería la definición rigurosa de continuidad? Está escrita en el apartado 16 de la apoyatura.

Sería únicamente expresar en términos matemáticos lo que hemos explicado anteriormente. Las tres condiciones que deben cumplirse para que una función f de x sea continua en un punto a son, primero, la función f debe estar definida en el punto a . Segundo, debe existir el de f cuando x tiende hacia a . Y tercero, el límite y el valor de la función en a deben coincidir. Entonces, si no se cumple alguna de las tres condiciones, la función será discontinua, ¿no es así? En efecto, señorita.

La doble implicación que aparece en la figura 16 no dice que si f es continua se cumplen las tres condiciones y viceversa, o sea, que si se cumplen las tres condiciones, f será continua. Diremos que esta es la condición necesaria y suficiente para que sea una función continua. Veamos ahora algunos ejemplos de funciones continuas y discontinuas que nos servirán para aclarar ideas sobre la definición de continuidad.

En la figura 17 de la apoyatura escrita tienen ustedes dibujada la gráfica de la función parábola, centrada en el origen. El dominio de definición de esta función, según podemos ver, es toda la recta real. Vean un momento la figura y díganme después en qué puntos del dominio es continua esta función.

Creo que es una función continua en todos los puntos del dominio de definición, ya que cumple las tres condiciones de continuidad en cada uno de ellos. Perfectamente, es un ejemplo de función que no tiene ninguna discontinuidad en ningún punto de la recta real. En la figura 18 tenemos representada la función con la cual comenzamos esta emisión.

Volvemos sobre ella porque nos va a ser útil para ver un concepto nuevo, el de límites laterales.

¿Cuál sería el dominio de definición de esta función? El dominio de definición es el conjunto de valores x para los cuales existe su imagen, es decir, f de x . El dominio de definición será toda la recta real. De acuerdo, habíamos visto que esta función tenía una discontinuidad en el punto x igual a cero, o sea, en el origen.

Esto quiere decir que algunas de las tres condiciones que veíamos en la definición de continuidad no se cumplen. Bueno, una o varias de esas condiciones. ¿Me podrían analizar las condiciones de continuidad en el origen de esta función? Según decía mi compañera, la primera condición se cumple, ya que la función en x igual a cero vale precisamente cero por definición.

¿Podríamos decir que el límite de esta función cuando x tiende a cero es menos uno? Bueno, según la definición del límite, si este fuera menos uno cuando x tiende a cero, para cualquier entorno por pequeño que fuera de menos uno, tendríamos que encontrar otro entorno de cero tal que todos los puntos x que estuvieran en este último entorno tuvieran sus imágenes en el entorno de menos uno. Pero en el dibujo vemos que para los puntos del entorno de cero que están a la derecha de él, es decir, que sean positivos, los valores de las imágenes no están en el entorno de menos uno, ya que valen más uno. Esto es siempre cierto por muy pequeño que sea el entorno de cero.

Luego, yo creo que menos uno no es el límite de esta función cuando x tiende a cero. Perfectamente. En efecto, vemos que menos uno no cumple la definición del límite.

Podríamos decir algo completamente similar para el punto más uno. Luego, esta función no tiene límite cuando x tiende a cero. Entonces, podemos decir ya que no se cumple la segunda condición de la definición de continuidad.

Efectivamente. Supongamos ahora que nos vamos acercando al valor x igual a cero por la izquierda, es decir, tomando valores negativos de x . Intentemos calcular el valor del límite de la función cuando x tiende a cero por la izquierda, es decir, cuando x tiende a cero tomando solo valores negativos. En la definición del límite decíamos que b era el límite de una función f cuando x tendía hacia a . Si para cualquier entorno de b podíamos encontrar un entorno de a cuyos puntos tuvieran la imagen en el entorno de b . Al hablar de entorno de a , considerábamos valores de la variable x próxima a a , tanto a su derecha como a su izquierda.

Cuando buscamos el límite de una función con x tendiendo hacia a por su izquierda, sólo consideramos los puntos del entorno que están a la izquierda de a . Estos puntos son los que deben tener su imagen en el entorno de b . Entonces, en nuestro caso, al tomar sólo los puntos del entorno de cero que están a su izquierda, es decir, negativos, podemos decir que el límite de f cuando x tiende a cero por su izquierda es menos uno, porque hemos eliminado los puntos del entorno de cero situada a su derecha, que eran las que no tenían su imagen en el entorno de menos uno. Exacto. Diremos que el límite lateral por la izquierda de esta función en el origen es menos uno.

Entonces, de igual forma, podemos decir que el límite de esta función por la derecha es más uno. ¿No es así? Efectivamente. Vemos que esta función tiene límites laterales por la derecha y por la izquierda en x igual a cero.

Como vimos, esta función no tiene límite cuando x tiende a cero. Esto es debido a que los límites laterales, aun existiendo, no son iguales. Desde luego, si uno o los dos límites laterales no existieran, la función tampoco tendría límite.

Se puede demostrar que si una función tiene límite por la derecha y por la izquierda, cuando x tiende a un punto dado y estos límites son iguales, la función tiene límite en ese punto y es igual al valor de los límites laterales. Entonces, cuando nos preguntamos si una función tiene o no límite en un punto, lo que en realidad estamos haciendo es ver si existen los límites laterales y si son iguales. ¿No es así? Exactamente.

Directamente relacionado con el concepto de límite por la derecha y por la izquierda de una función, están los conceptos de continuidad por la derecha y continuidad por la izquierda. No nos pararemos ahora a verlos, ya que, si han comprendido la idea de límite lateral, no tendrán dificultad para estudiarlos en cualquier libro de texto. Como final, en la figura 19 de la apoyatura, tienen una función con más de un punto de discontinuidad.

El estudio de esta función sería, en parte, análogo al efectuado con la función de la figura 18. En la próxima emisión, daremos un repaso general a los conceptos de límite y continuidad.