

AC 10 77

El próximo lunes, y a esta misma hora, es decir, a partir de las 10 de la noche, y dentro de la programación especial en cuanto a tiempo se refiere que tenemos en esta semana y en la próxima, continuaremos con temas de introducción a las ciencias de la educación. En concreto, el lunes próximo, hablaremos del tema 3, los sistemas educativos en los organismos internacionales de educación, y del tema 4, la planificación de la educación desde el ángulo internacional, hasta la pregunta titulada, la teoría de la planificación. Dentro de unos minutos, hablaremos con el profesor titular de matemáticas, Víctor Hernández Morales, de la asignatura de matemáticas básicas.

Vamos a dar unas orientaciones sobre los capítulos 4 y 5, pero asimismo aprovecharemos el tiempo para repasar los 3 capítulos anteriores. Repasaremos, de hecho, los capítulos 1, 2, 3, 4 y 5 del libro de texto. Y a las 11 de la noche, aproximadamente, 10 en canarias, en introducción a la historia del mundo contemporáneo, continuaremos con el tema que iniciamos anteriormente sobre la historia del siglo XIX español, y asimismo adelantaremos la historia española en el primer tercio del siglo XX.

Nos ocuparemos de la segunda mitad del siglo XIX español, del último período del reinado de Isabel II, y luego hablaremos de la revolución de 1868, la gloriosa o septembrina, de la primera república, de la restauración, con Alfonso XII, y del desastre de 1898, y en lo que se refiere al siglo XX, unas pinceladas sobre el reinado de Alfonso XIII, y también los primeros momentos de la dictadura de Primo de Rivera. Matemáticas básicas e introducción a la historia del mundo contemporáneo son las asignaturas del curso de acceso directo para mayores de 25 años, que ocuparán el resto de nuestro tiempo en el programa de hoy. Mañana martes, en horario normal, 11 de la noche, 10 en Canarias, en Historia del Arte, hablaremos de los artes románico y gótico.

Este miércoles estaremos una hora con vosotros, dentro de los programas especiales que, por celebrarse las primeras pruebas personales de los alumnos de carreras universitarias, tenemos a lo largo de esta semana y de la próxima. Este miércoles, en concreto, estaremos a las 10 y media de la noche y hablaremos de literatura española, y a las 11 de geografía. Y el jueves estaremos también una hora, desde las 10 y media y hasta las 11 y media, horario peninsular.

El miércoles hemos dicho que tenemos literatura española y geografía, y el jueves tendremos química, en que hablaremos de la estructura atómica, y francés. En francés, del método Chez Gamin, acabaremos con el volumen primero, puesto que nos referiremos a las lecciones 10, 11 y 12. Por supuesto, este programa debe ser escuchado no solamente por los alumnos del curso de acceso, sino también por los de matrícula abierta que siguen el mismo método de francés.

Y en lo que se refiere a este viernes, no tendremos programas del curso de acceso, sino de extensión cultural y de matrícula abierta. Estaremos también una hora con todos vosotros, a las 10 y media de la noche, en cultura italiana, de la serie Regiones de Italia, hablaremos de la

región de Apulia, y a las 11 de la noche, este viernes, en regímenes políticos latinoamericanos, iniciaremos un nuevo tema. Nos ocuparemos de movimientos indígenas en Latinoamérica, pero en este caso, refiriéndonos al caso de Bolivia.

Consultad la guía de los medios audiovisuales para saber qué días hay programas de las asignaturas, o bien otros espacios, que os interese escuchar y grabar. No olvidéis, los alumnos de Introducción a las Ciencias de la Educación, que el próximo lunes volveremos a tener un programa de esta asignatura, y también de Matemáticas Básicas, como ahora, dentro de unos minutos, y también de Introducción a la Historia del Mundo Contemporáneo. Es decir, que el próximo lunes tendremos una estructura igual a la de hoy.

Introducción a las Ciencias de la Educación, Matemáticas Básicas e Introducción a la Historia del Mundo Contemporáneo. Seguimos ahora con el tiempo que dedicamos a Matemáticas Básicas. Con el profesor titular Víctor Hernández Morales, vamos a dar unas orientaciones sobre los capítulos 4 y 5 del libro de texto.

Inicialmente, teníamos previsto también repasar los capítulos 1 al 5, pero esto no va a ser posible porque no disponemos de mucho tiempo. Así que nos vamos a centrar en los capítulos 4 y 5, y dejaremos ese repaso para otros programas en el futuro. Por cierto, que dentro de una semana, y a esta misma hora, tendremos un nuevo espacio de Matemáticas Básicas, en el cual orientaremos, no lo olvidéis, sobre la lección siguiente, que será el capítulo 6. Bien.

Buenas noches, Víctor. Buenas noches. Y entonces, comenzando por el primer capítulo, que es el cuarto, no es complicado, ¿no? ¿Qué se aborda en él? Se trata de los números enteros, operaciones con enteros, la manera de escribir los enteros, es decir, lo que de una forma un poco más técnica se denomina cambio de base, o expresión de un número entero respecto de una base, y de las propiedades de la división de enteros, que también de manera técnica se dice divisibilidad.

Ahí es donde tienen que aprender bien esos conceptos de máximo como un divisor y mínimo como un múltiplo. Sí, que por otra parte son muy sencillos. Si un número entero divide a otro, será más pequeño que él.

Si simultáneamente divide a dos, será más pequeño que ambos. Y parece normal preguntarse cuál será el mayor de estos números más pequeños que simultáneamente divide a dos. Ese es el mayor de los divisores comunes, puesto que divide a los dos, y de una forma breve se denomina máximo como un divisor.

¿Y el mínimo como múltiplo? El mínimo como múltiplo, por el contrario, si un número es múltiplo de otro, si el otro le divide a él, es decir, un número es múltiplo de otro, si es de la forma un producto del número dado por otro, de suerte que forzosamente ha de ser mayor o igual que él. Por la misma razón, si nosotros tenemos un número múltiplo de dos dados, será mayor o igual que cualquiera de esos dos números, o al menos igual a ellos. Y también aquí, digamos, el problema significativo consiste en plantearse cuál es el menor de los múltiplos

comunes.

De todos esos números mayores que dos dados, que son múltiplos de ambos, ¿cuál es el menor de todos? Ese es el concepto que hay que buscar. Bueno, de todas maneras, esto no es nada complicado, y desde luego cómo se aprende es viendo algunos modelos de problemas resueltos. Por tanto, acudid al libro de problemas y ahí veréis bastantes ejemplos con respecto a esto.

Podíamos hacer de todas maneras algún ejemplo de los que hayan caído en exámenes en cursos pasados, pero algo importante con relación a esto es lo que se refiere a los signos. Sí, respecto de las operaciones con números enteros, prácticamente estamos acostumbrados a ellas, pero en fin, si no es así, se recuerdan fácilmente con lo que comúnmente se denomina regla de los signos. El más por menos, el menos por menos y todas estas cositas.

Y quizá la forma, al menos así a mí me lo parece, la forma más cómoda de poder razonar incluso el porqué de esta regla de los signos es manejando o pensando en las temperaturas. Las temperaturas que suben, las temperaturas que bajan... Que es el ejemplo que nos ibas a poner, que cayó en un examen anterior. Pues vamos a ver ese ejemplo precisamente para manejar la regla de los signos, que es muy simple.

Cuando los dos signos son iguales es siempre más y cuando son diferentes es siempre menos. Pero vamos a verlo en algún ejemplo práctico. Sí, esta cuestióncilla dice así.

A leer el problema, sí. Estamos a cero grados y la temperatura lleva todo el día bajando a razón de dos grados cada hora. Hace tres horas estábamos a... Y nos ofrecen tres alternativas.

Menos seis grados, seis grados y cuatro grados. Evidentemente la respuesta correcta parece ser que es la B, ¿no? Seis grados, porque lo que se plantea es a qué temperatura estábamos hace tres horas. Así es.

Aquí hay realmente dos signos menos. Uno es el signo menos del decrecimiento de la temperatura con el tiempo. Cuando pasa una hora la temperatura, podemos decir, que se transforma en menos dos grados la anterior.

Y como la pregunta, esto sí que hay que leerlo con cuidado, nos hace referencia a lo que pasaba, a lo que hace tres horas ocurría, pues estamos pensando en un tiempo también negativo. ¿Qué pasaba hace menos tres horas? Y la respuesta, pues un poco algebraica, quizá en exceso, es menos tres horas por menos tres grados que sube la temperatura, por así decir, cada hora, es seis grados. Bien, de todas maneras esa regla de los signos, que no lo olviden, que en plan práctico es muy fácil de recordar, ¿no? Más por más más, menos por menos más, más por menos menos o menos por más menos.

Bien, pues entonces yo pienso que con respecto a esta lección, la cuarta, no hay mayores dificultades, ¿no? Posiblemente sea la quinta, que trata de combinatoria donde los alumnos pueden tener algún mayor problema. Vamos a hablar de la lección quinta, de la combinatoria.

Es un tema, sí, que normalmente ofrece más dificultades.

Combinatoria, podríamos, si atendemos a lo que realmente significa, nos puede parecer que es algo o debe ser algo extraordinariamente simple. Combinatoria significa contar, contar el número de elementos que tiene un conjunto. Ese es el problema fundamental de la combinatoria.

Pero la cuestión se complica y fundamentalmente la complican los conjuntos, o más precisamente, cómo están definidos los conjuntos. Me explicaré con más, más despacito. Si nosotros tenemos un grupo de personas en el patio de un colegio, por ejemplo, pues podemos contarlos fácilmente, porque de ello, de hecho, se cuentan ellos solos.

Si queremos, le decimos a cada uno que vaya diciendo un número en forma correlativa y el que diga el último es el número de personas. Naturalmente, con los conjuntos nos apetecería hacer esto, pero los elementos de los conjuntos no suelen respondernos y somos nosotros los que, de alguna manera, tenemos que poner orden, por así decir, en los conjuntos para averiguar cuántos elementos tienen. Y entonces, pues eso quiere decir que puede haber diversos métodos o distintos métodos para contar.

Sí, hay distintos métodos que tratan de adaptarse a la estructura que presentan los elementos de los conjuntos. El primero de ellos sería el más atractivo, el más fácil, y consistiría en que si nosotros tenemos un conjunto que, por algún motivo, los elementos, por decir así, están ordenados en fila, pues debe ser relativamente fácil contarlos. Podemos establecer una asociación, una correspondencia, de manera que al primer elemento de la fila, pues le asociamos el 1, al segundo le asociamos el 2, y el último debe ser asociado a un número, de momento desconocido, depende de lo que tengamos entre manos, pero que representará al cardinal del conjunto, al número de elementos del conjunto.

Esta, sin duda, es la forma más cómoda de contar. Por desgracia, no todos los elementos, no todos los conjuntos, por así decir, traen a sus elementos ordenados en fila. Un conjunto que los trae ordenados en fila, vamos a poner un ejemplo, y que por lo consiguiente resulta relativamente cómodo contar su número de elementos, pues sería el conjunto formado por los números 24, 25, 26, hasta el 81.

El conjunto de todos los números enteros que hay entre el 24 y el 81, ambos inclusive. Claro, entonces podemos establecer una correspondencia para contarlos, para contarlos tal y como dijiste, cogiendo el primero de estos números, que es el 24, y haciéndole corresponder, por ejemplo, el 1. El siguiente, que sería el 25, haciéndole corresponder el 2. El siguiente, que sería el 26, haciéndole corresponder el 3, y así sucesivamente hasta llegar al 81. Hasta llegar al 81.

Y lo que tenemos que tratar es de averiguar qué número sería el que, llegado el caso, haríamos corresponder al 81. Y no resulta del todo difícil, porque, como bien has dicho, Arturo, si al 24 le corresponde el 1, pues podemos pensar la diferencia, 24 menos 1 es 23. Si al 25 le corresponde el 2, ¡caramba!, la diferencia también es 23.

Si al 26 le corresponde el 2, ¡demonios!, la diferencia también es 23. De manera que, en esa correspondencia, el orden se corresponde con el elemento, de suerte que la diferencia entre el número que corresponde al elemento y el número que corresponde al orden es siempre 23. Claro, hemos descubierto una regla, ¿no? Entonces sería que el 81 menos ese número que buscamos nos tiene que dar 23.

Así es. Y, por consiguiente, hay 58 elementos en el conjunto. Esto nos enseña una cosa, que con frecuencia se comete este error.

Y muy a menudo las personas razonan así, o creen razonar así. Del 24 al 81 hay 81 menos 24 números. Y no es así.

Del 24 al 81, ambos inclusive, claro está, hay 81 menos 24 más un número. Hay 58 números. Bien.

Bueno, pues esta sería una manera de contar. ¿Y se puede dar algún tipo de regla que sirva para construir y numerar los elementos del conjunto? Sí, vamos, se puede, no de una forma general, pero como recomendación, esto sería más bien el segundo método fundamental de contar. De alguna manera, no todos los conjuntos tienen una estructura en la cual sus elementos estén ordenados en fila.

Sus elementos guarden entre sí alguna cierta clase de orden total. Como hemos visto en este ejemplo, claro. Así, claro.

Normalmente los conjuntos, pues en cierto modo, presentan una estructura, podríamos pensar que amorfa, o bien desordenada, o bien los elementos, pues se ordenan con este orden más general que ya hemos estudiado en la lección 2, que es una especie de árbol que se va bifurcando y ahí, claro, no es tan sencillo contarlos como cuando están puestos en fila. Para estas situaciones, naturalmente hay que amordarse a cada caso particular, pero resulta muy útil tratar de razonar como si estuviésemos tratando o intentando escribir todos los elementos que constituyen el conjunto. Vamos a ver, lo vamos a explicar con un ejemplo.

De los que han caído en los exámenes. Sí. Pues muy bien, vamos a ver.

Por ejemplo, este creo que es representativo. Dice, ¿cuántos números de tres cifras significativas son pares y capicúas? Y nos dan tres opciones, ¿no? Y nos dan tres opciones que son A-36, B-40 y C-90. Y hay que ver cuántos números de tres cifras significativas son pares y capicúas.

Pues hagamos lo siguiente. Bueno, nuestra primera intención quizás sea ponernos a escribir todos los números. Lo que vamos a hacer es algo un poco más breve, pero casi casi lo mismo.

Si tuviésemos que escribir los tres números, perdón, todos los números, puesto que tienen tres cifras significativas, sería equivalente a rellenar tres lugares que en principio están vacíos. Sí, como tres rayitas. Podemos imaginarlo, sí, como habréis estudiado en el libro.

Una situación en la que ponemos tres rayitas y encima de cada una de ellas hay que poner un número. Cuando esté completo tendremos un número de tres cifras que esperamos cumpla las condiciones que dice el problema. Que sea capicúa y par.

Como queremos que el número sea par, vamos a empezar por la última. ¿Qué poner en el último lugar? Pues en el último lugar podemos poner 2 o 4 o 6 o 8. De manera que para el último lugar o cero. Para el último lugar en principio tendríamos cinco posibilidades.

Pero cuidado, el número ha de ser al mismo tiempo capicúa y tener tres cifras significativas, de manera que el cero no nos vale. Si pusiésemos un cero en el último lugar, para que sea capicúa, debe haber un cero también en el primer lugar y entonces el número ya no es de tres cifras significativas, sino de dos. Quizá a algún alumno haya que recordarle lo que significa capicúa.

Es una cifra en la cual el primer número es el mismo que el último. De manera que tenemos cuatro posibles elecciones para el último número. Puede ser, hemos descubierto ya... Pares, claro, pares, o dos, cuatro, seis o ocho.

Eso es. Y por consiguiente ahora vamos a obligar a que sea capicúa. ¿Cuál puede ser el primer número? Forzosamente igual al que ya hemos escrito.

De manera que sólo escrito el último número, sólo hay una forma de escribir el primero. Exactamente igual al último. Pero lo podemos tener 2 raya 2, 4 raya 4, 6 raya 6 y 8 raya 8. Eso es.

Y ahora vamos a elegir el que va en segundo lugar. ¿Cuál puede ser? ¿Puede ser el cero? Pues sí. Aquí no hay restricción para que sea el cero, puesto que eligiendo un número 2, 4, 6 o 8 en primer lugar, el número tiene tres cifras significativas y no hay ningún inconveniente que sea el 202, por ejemplo.

¿Puede ser el 1? También puede ser hasta el 9. Hay pues 10 elecciones distintas posibles para la cifra que va en segundo lugar. En total tenemos, repasando, cuatro elecciones posibles para la primera cifra, 10 elecciones posibles para la segunda y una sola elección posible para la tercera, entendiendo por tercera la cifra de las centenas. Hay pues 40 números distintos.

Sí. Bien, entonces esa sería la respuesta a esta pregunta. La respuesta B, porque la pregunta decía ¿cuántos números de tres cifras significativas son pares y capicúas? Y nos daba A, 36, B, 40, que es el resultado que has hallado, y C, 90.

Efectivamente hay cuatro posibilidades para la última cifra, 10 posibilidades para la penúltima y una sola posibilidad, que tiene que ser igual que la última, para la antepenúltima, es decir, para la cifra de las centenas. Este procedimiento, en cierto modo, trata de simular esa manera efectiva de construir todos los números. Si los quisiéramos construir de una forma ordenada, tendríamos que empezar diciendo, vamos a poner que el primero sea el 2, por ejemplo, y a hacer de todas las maneras posibles los restantes números.

Después, que el primero sea el 4, y de todas las maneras posibles, los restantes, claro, maneras posibles que cumplan las condiciones del problema. Pues ya digo, este procedimiento lo llamamos constructivo, por eso, porque trata de simular, de parecerse a eso que decimos la cuenta de la vieja, que sería ponerse bum bum bum y hacer una construcción efectiva de todos los números. Bueno, la verdad es que contar en matemáticas no está tan simple como a simple vista podría parecer, porque puede haber conjuntos en los cuales no aparezcan con una estructura tan ordenada, como este ejemplo que hemos visto, que poníamos unas restricciones y ya sabíamos exactamente qué números podían ser.

Yo que sé, se me ocurre pensar, por ejemplo, en un colegio donde hay 20 clases y cada clase tiene a su representante de curso, y se trata luego de sacar a dos de entre estos 20 que vayan a representar a todo el colegio, sin tener ningún criterio determinado de preferencia a favor de unos o de otros. Entonces, ante un problema de este tipo, ¿qué forma de contar podemos seguir? Sí, ahí hay otra posibilidad, otro modelo, otro método, que decimos método de los subconjuntos. Como bien dices, el problema que tenemos cuando queremos elegir a los dos representantes del colegio de entre los 20 delegados de curso, consiste en que no podemos estructurarlos como en el ejemplo anterior.

No podemos decir cuál es el primer delegado y cuál es el segundo, porque, por ejemplo, si elegimos a Juan el primero y a Pepe el segundo, estamos contando dos veces, porque en otra ocasión contaremos a Pepe el primero y Juan el segundo, y la delegación que representa al colegio sigue siendo la misma, sigue estando compuesta por Juan y Pepe. Pues bien, la manera, el mejor modo de atacar estos problemas es conocer una cosa bien, bien sencilla, que es el número de subconjuntos con k elementos, de un conjunto que tiene n elementos, es un numerito que llamamos n sobre k , un numerito que se dice combinatorio, porque pertenece al mundo de la combinatoria, y que, si queremos calcular o queremos hacer efectivo su valor, pues nos basta saber que n sobre k es igual a n factorial partido por k factorial multiplicado por n menos k factorial. Sí, y eso además, bueno, eso es n sobre k , la forma de representar esto, tengo entendido que es un paréntesis grande y arriba, en la parte alta del paréntesis, dentro, por supuesto, se pone la n y en la parte de abajo la k . Esa es la forma de ponerlo, ¿no? Entonces, ese n sobre k , la forma de calcularlo matemáticamente es mediante esta fórmula que acabas de dar, n factorial dividido por k factorial, que multiplica a su vez a n menos k factorial.

Lo que quiere decir factorial, supongo que todo el mundo lo entenderá viéndolo en el libro, pero este sería la forma de contar el modelo de los subconjuntos. Así es. Por ejemplo, en el problema que planteabas tú, Arturo, pues las maneras distintas de elegir a esos dos representantes del colegio es 20 sobre 2. Esa es la respuesta correcta, simplemente 20 sobre 2. Claro, n sería 20, k sería 2, por tanto, incluso aplicando la fórmula, pues sería 20 factorial dividido por 2 factorial multiplicado por 20 menos 2 factorial, es decir, por 18 factorial.

Por 18 factorial, exacto. Muy bien. Bueno, y algún ejemplo para terminar, podríamos comentar, de los que hayan podido caer en los últimos exámenes.

Bien, pues aparte, por ejemplo, hablando de delegados, podemos plantearnos este y analizar un poquito la diferencia con el problema que tú planteabas. Dice así, en una clase hay 30 alumnos. ¿De cuántas maneras distintas se puede elegir a un delegado y a un subdelegado? Y todavía, por si la cosa está oscura, matiza.

Los dos cargos no pueden recaer en la misma persona. Y en el test del examen nos dan tres posibilidades, la primera 30 multiplicado por 29, la segunda 30 sobre 2 y la tercera 30 al cuadrado. ¿Cuál es la correcta? Hombre, la tercera 30 al cuadrado parece mala, ¿verdad, Arturo? Parece bastante rara, sí.

Nos han dicho que los dos cargos no pueden caer en la misma persona, pero este pequeño y simple ejercicio nos muestra quizá un poquito la dificultad que suelen encontrar los alumnos para estudiar la combinatoria. Porque entienden muy bien lo del modelo de los subconjuntos, entienden muy bien lo del modelo constructivo, de decir cuántas elecciones hay ahora, cuántas hay luego, pero llega el momento en el que, además, uno debe ser capaz de discernir cuál de los dos modelos es el conveniente al problema que tiene entre manos. Aquí hay una cuestión crucial que diferencia a este enunciado... Del anterior.

Del anterior, del que proponías tú, Arturo. Sí, y es que hay una jerarquía, claro. Hay un delegado y un subdelegado.

Entonces, hay una jerarquía en las personas que se eligen. No es lo mismo ahora que Juan sea el delegado y Pedro el subdelegado, a que Pedro sea el subdelegado y Juan el... A que Pedro sea el delegado y Juan el subdelegado. Eso es.

Entonces, esto a mí, por lo menos, me recuerda más al problema de los números. Es decir, que puesto que es distinto un puesto del otro, me apetece más razonarlo así, decir, ¿de cuántas maneras puedo elegir yo al delegado? Vamos a elegir primero al delegado, para no liar las elecciones. Pues de treinta, porque como hay treinta alumnos... Claro, el delegado puede ser uno cualquiera de los treinta alumnos, luego hay treinta formas posibles de elegir a éste.

Y ya, una vez elegido, nos quedan veintinueve alumnos. Nos quedan veintinueve alumnos, solamente disponibles para elegir al subdelegado. Por tanto, sería treinta multiplicado por veintinueve.

Treinta por veintinueve, así es. Por cada elección del delegado, hay veintinueve elecciones posibles del subdelegado. Por tanto, la respuesta que a lo mejor a muchos se le ocurriría, que era la segunda, treinta sobre dos, pensando en el tema de los números combinatorios, no sirve, porque en este caso de contar, no se aplica el modelo de los subconjuntos, sino el modelo que anteriormente habíamos visto.

Muy bien, pues confiamos que con estas orientaciones tengáis una idea aclaratoria que os sirva para estudiar bien los conceptos que se explican en los capítulos cuatro y cinco, y asimismo que miréis muchos problemas resueltos en el libro de ejercicios, porque eso evidentemente ayuda.

Dejamos el repaso de los cinco primeros capítulos para otro futuro programa, porque hoy no tenemos tiempo. Víctor, muchas gracias por haber estado con nosotros.

Gracias. Y el próximo lunes volverás a estar con nosotros para hablarnos de la elección sexta. Buenas noches.