

AC 15 21

Matemáticas especiales, guión número 9, autor Joaquín Abejer, fecha de emisión 28 del 11 del 79. Comenzaremos esta emisión haciendo un repaso de un concepto utilizado repetidamente en emisiones anteriores. Usted me va a ayudar.

¿Recuerda qué es producto cartesiano de dos conjuntos? Creo que sí. Vamos a ver, dados los conjuntos A y B, llamamos producto cartesiano A por B al conjunto formado por todos los pares ordenados, tales que el primer elemento de cada par pertenece al conjunto A y el segundo elemento del par pertenece a B. Bien, creo que se entiende suficientemente la definición. No insistiré más en ella.

Sin embargo, puede ser interesante aclarar una cuestión. ¿Tiene sentido hablar del producto cartesiano de un conjunto por sí mismo? Desde luego que sí. Un producto cartesiano de este tipo lo aplicamos cuando vimos el tema de las relaciones binarias.

Creo que es un caso particular de la definición general de producto cartesiano. Bueno, efectivamente, la definición hay que particularizarla de esta manera. Dado un conjunto A, el producto cartesiano de A por A es el conjunto formado por todos los pares ordenados, tales que las dos componentes de cada par sean elementos de A. Ahora quiero que fijen su atención en un detalle que va a tener gran trascendencia para la idea de ley de composición interna.

Supongamos que X e Y son elementos del conjunto A y distintos entre sí. Por tanto, el par XY es un elemento del producto cartesiano A por A. Pues bien, necesariamente el par YX pertenecerá al conjunto A por A. Surge, pues, la siguiente pregunta. ¿Son iguales estos dos pares? Yo creo que no.

Para construir el producto cartesiano A por A, consideramos pares ordenados de elementos del conjunto A. Por lo cual, no es lo mismo hablar del par XY que del par YX. Bien, aclarada esta cuestión, debemos retener la idea de orden dentro del par para cuando al final estudiemos las propiedades de las leyes de composición interna. Entrando ya en el tema, vamos a introducir la idea intuitiva de ley de composición interna con un ejemplo.

Consideramos el conjunto de los números naturales, es decir, el conjunto de los números 1, 2, 3, 4, etc. En lo sucesivo le llamaremos N. Consideraremos también la operación que llamamos suma de números naturales. Vamos a analizar, por ejemplo, la frase 2 más 3 igual a 5, que desde luego es matemáticamente correcta.

Pero no nos fijaremos en ello, solo estudiaremos su forma. Dividiremos la frase en dos partes. Por un lado tendremos 2 más 3. Por otro lado, igual a 5. Atendamos en primer lugar a la forma que tiene la parte de la frase 2 más 3. Si provisionalmente eliminamos la partícula más, queda simplemente 2, 3. Creo que esto le recordará algo.

2, 3 puede ser un par ordenado perteneciente al producto cartesiano del conjunto de los

números naturales por sí mismo. Estupendo. 2, 3 es un par contenido en el producto cartesiano N por N . Por tanto, al reducir la primera parte de la frase, 2 más 3 igual a 5, a su mínima expresión, encontramos que, al hacer una suma, partimos siempre de un par ordenado de números.

Tomemos ahora el segundo trozo de nuestra frase, igual a 5. Vamos a transformarlo en se le asigna el 5. Después de las deformaciones sufridas, 2 más 3 igual a 5 queda como al par 2, 3 se le asigna el 5. Y para que el contenido de la nueva frase sea equivalente al de la primera, le haremos un añadido oportuno, obteniendo al par 2, 3 se le asigna el 5 en la suma. Podemos generalizar diciendo que a cada par de números naturales se le asigna o le corresponde un número natural en la suma. Pienso que esta formulación debe recordarle algo.

Parece que se trata de una aplicación, ya que a todo par le corresponde un solo número natural, suma de los dos números del par. Ha dicho lo más interesante. Pero, ¿sería capaz de concretar más? No, no lo entiendo.

Bueno, bueno, me explicaré. Cuando hablamos de una aplicación, es necesario precisar cuáles son los conjuntos de partida y de llegada. ¿Cuáles son en este caso? El conjunto de partida, al estar formado por pares ordenados de números naturales, será el producto cartesiano n por n . Y el de llegada será el conjunto de los números naturales.

Perfecto. Resumiré las conclusiones. La suma de números naturales es una aplicación del producto cartesiano n por n en el conjunto n . O dicho de otra manera, a cada par ordenado de números naturales se le asigna un número natural, llamado suma, que se obtiene del par mediante una regla operativa determinada.

Este ejemplo nos allana el camino para comprender la definición de ley de composición interna. Supongo que usted quiere decir que el ejemplo de la suma no es más que un caso particular de ley de composición interna. Exacto.

Generalizando las conclusiones obtenidas al analizar formalmente la suma de los números naturales, estamos ya ante el concepto de ley de composición interna. Les digo ahora su definición. Una ley de composición interna sobre un conjunto A es una aplicación del producto cartesiano a por a en el conjunto A . Es decir, a cada par ordenado x y de elementos de A , la ley de composición interna le hace corresponder un solo elemento del conjunto A , al cual llamaremos x compuesto con y . Pasaremos ahora a estudiar algunas de las propiedades que pueden tener las leyes de composición interna.

Vamos a analizar las siguientes propiedades. Conmutativa, asociativa, existencia del elemento neutro y existencia del elemento simétrico. Diremos que una ley de composición interna sobre el conjunto A cumple la propiedad conmutativa cuando para todo par de elementos x e y , pertenecientes al conjunto A , se tiene que el elemento de A , x compuesto con y , es igual al elemento y compuesto con x . Quiere decirse entonces que si se cumple la propiedad conmutativa, el orden en que se componen dos elementos no influye en el resultado obtenido.

Veo que lo comprende. Y aunque su interpretación es correcta, debería haberse expresado con más rigor. Y esto en el siguiente sentido.

Fíjese bien. Se cumple la propiedad conmutativa cuando a cada par de elementos x y y del producto cartesiano A por A y al par yx les corresponde el mismo elemento de A en dicha ley de composición interna. ¿Ve más claro ya el significado de esta propiedad? Creo que sí.

Bien, veamos si ahora es usted capaz de hacer el enunciado de la propiedad conmutativa para la suma de números naturales. Voy a intentarlo. La suma de números naturales cumple la propiedad conmutativa ya que si, por ejemplo, tenemos el par de números 2-3 y el par de números 3-2, los elementos que les hace corresponder respectivamente la aplicación suma son el mismo número natural, el 5. Se tiene pues que el número 2 más 3 es igual al número 3 más 2. Se ha expresado usted muy bien.

Muy bien. Sin embargo, falta algo que decir. Falta algo.

¿Qué se le ha olvidado? Creo que se debería añadir que todo ello ocurre cualquiera que sea el par de números naturales que tengamos. Efectivamente. Este es un detalle que demasiado a menudo omiten todos nuestros alumnos.

Piensen que tanto en el enunciado de esta propiedad como en los siguientes se debe especificar que dicha propiedad ha de cumplirse para todo elemento del conjunto en cuestión. Bueno, ahora sí, le parece, pasamos a la propiedad asociativa. Vamos a hablar en primer lugar de su necesidad.

Analicemos cómo suman ustedes los números naturales 2, 3 y 4. Pues operamos primero sumando el 2 y el 3, con lo que obtenemos el 5. Después sumamos el 5 con el 4 y obtenemos 9. Bien, pero yo voy a sumar de otra manera. Sumo los dos últimos números, el 3 y el 4, obteniendo 7. Luego sumo el primer número, el 2, con el resultado intermedio, el 7, obteniendo 9 como suma total. De ambas formas es correcto sumar tres números, ¿verdad? Sí, esta es una forma de comprobar el resultado de una suma.

Pues bien, estos dos modos de operar la suma de tres números solo son correctos si estamos autorizados por la propiedad asociativa de, en este caso, la suma de los números naturales. Es decir, solo tiene sentido la suma de tres números cuando, sumando el resultado de la suma de dos de ellos con el otro, obtenemos el mismo resultado que si inicialmente hubiéramos sumado otros dos y después este resultado lo sumáramos con el número restante. ¿Comprendido? Sí, perfectamente.

Pero, ¿puede enunciar en general la propiedad asociativa? ¡Cómo no! Una ley de composición interna en A tiene la propiedad asociativa si para toda terna, insisto, para toda terna de elementos x , y y z del conjunto A , se tiene que, al componer x compuesto con y con z , obtenemos el mismo resultado que al componer x con y compuesto con z . Terminaremos nuestra emisión pasando revista a la existencia del elemento neutro y del elemento simétrico.

Diremos que una ley de composición interna en el conjunto A tiene la propiedad de existencia del elemento neutro si para todo elemento x de A existe un elemento e perteneciente a A , tal que x compuesto con e es igual a e compuesto con x , e iguales ambos a x . Bien, y como nos queda ya muy poco tiempo, voy a enunciar rápidamente la última propiedad. Decimos que una ley de composición interna en el conjunto A tiene la propiedad de existencia del elemento simétrico si para cada elemento x de A existe otro elemento de A llamado simétrico de x , tal que x compuesto con simétrico de x es igual al elemento neutro de dicha ley de composición interna.

Si no interpreto mal, es preciso que se cumpla la propiedad anterior, que exista el elemento neutro, para que pueda existir el simétrico. Naturalmente, ha tocado un punto muy interesante, pero en fin, el tiempo es el tiempo. Más adelante, en una próxima emisión, aclararemos y completaremos este tema.