

AC 15 10

Matemáticas especiales, sucesiones de números racionales, emisión número 14. En esta emisión vamos a tratar un tema importante dentro del campo de los números racionales, sucesiones de números racionales. Veremos el concepto de sucesión, de límite y de sucesión de Cauchy.

Hasta ahora habíamos visto los números naturales, enteros y racionales, así como las leyes de composición interna que conforman sus estructuras algebraicas. Hoy, sin embargo, hablaremos sobre un tema que a muchos de ustedes les puede resultar nuevo. En realidad, es una parte distinta de las matemáticas.

Los temas anteriores pertenecían al álgebra. Este, sin embargo, forma parte del análisis matemático. ¿No será muy difícil explicar este tema por radio? Como en el resto de los guiones de matemáticas, no intentamos explicar profundamente los temas, ya que esta tarea es imposible sin la utilización de la lectura y la escritura como método de aprendizaje.

Trataré simplemente de aclarar los conceptos básicos, aportando las ideas intuitivas que no siempre están plasmadas en los textos. A propósito de esto, yo sé hacer algunos cálculos con límites, pero creo que la idea intuitiva no la tengo clara. Por esta razón, el concepto de límite se me escapa.

Precisamente, el objetivo principal de esta lección puede ser perfectamente el aclarar la idea de límite. Mejor dicho, abordar lo que podemos entender por proximidad en matemáticas. Antes de meternos en esta cuestión, que será el centro del tema, vamos a tratar el concepto de sucesión de números racionales.

Consideremos un subconjunto infinito de números racionales, y vayamos nombrándolos en un cierto orden. Es decir, tendremos un primer elemento, un segundo, un tercero, y así sucesivamente. Procediendo de esta manera, acabamos de construir una sucesión de números racionales.

Según lo que ha dicho usted, si yo elijo de cualquier forma infinitos números racionales y los ordeno de una determinada manera, habré construido una sucesión. Intuitivamente sí es una sucesión. La idea intuitiva está comprendida.

Sin embargo, ustedes comprenderán que en matemáticas no podemos movernos con nociones tan poco precisas. Perdóneme que le interrumpa, pero tal como hemos dicho, la sucesión tiene infinitos elementos. ¿Cómo expresar entonces todos los elementos de una sucesión? Me parece oportuna su pregunta.

En efecto, sería imposible enunciar uno a uno los infinitos elementos ordenados que forman una sucesión. Es preciso, pues, recurrir a una propiedad que cumplan los términos de la sucesión y sólo ellos. Es parecido a lo que hacíamos cuando definíamos por comprensión un

conjunto.

Bueno, pero he entendido que hay una diferencia entre sucesiones y un conjunto cualquiera. En la sucesión importa el orden de los elementos y en los conjuntos no. Si definimos por comprensión una sucesión, ¿cómo hacemos con el orden de sus elementos? Vamos a aclarar esta cuestión por medio de un ejemplo.

Consideremos la sucesión de números racionales 1 partido por 1, 1 partido por 2, 1 partido por 3, 1 partido por 4, etc. En esta sucesión observen que la regla para obtener uno cualquiera de sus términos es sustituir en la expresión 1 partido por n este n por el número natural que corresponda. Por ejemplo, para obtener el término décimo de esta sucesión, damos a n el valor 10 y el término será 1 partido por 10.

En este caso decimos que 1 partido por n es el término general de la sucesión, ya que mediante él podemos obtener cualquier término particular de ella a partir del número de orden que dicho término ocupa en la sucesión. ¿Comprenden qué es el término general? Creo que sí. Es una expresión que permite a partir del número de orden de un término, que lo hemos llamado n , calcular dicho término.

Lo ha dicho correctamente. Vamos a analizar detenidamente lo que usted acaba de decir. A cada número de orden le corresponde el término de la sucesión que ocupa ese lugar.

Como el número de orden es un número natural y los términos de la sucesión son números racionales, lo que estamos haciendo es establecer una aplicación entre el conjunto de los números naturales en el conjunto de los números racionales. Ah, entonces podemos interpretar lo que usted dice considerando a una sucesión como un caso particular de aplicación. Efectivamente.

Eso es lo que quería resaltar. Estamos ya en condiciones de definir el concepto de sucesión de números racionales. Llamamos sucesión de números racionales a una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números racionales.

Las imágenes en esta aplicación se llaman términos de la sucesión y cada origen es el número de orden de dicho término. ¿Cuál sería entonces el significado del término general dentro de esta definición? ¿No sería la imagen de cualquier número natural n ? De acuerdo. Como ya dijimos, el término general de la sucesión es la imagen en la aplicación de un número natural n cualquiera.

Para aclarar esta noción, vamos a considerar, por ejemplo, la sucesión un medio, dos tercios, tres cuartos, cuatro quintos, etc. ¿Cuál sería la imagen del número natural seis? Pues la imagen del número natural seis, que sería el sexto término de la sucesión, es seis séptimos. Muy bien, muy bien.

Bien. Y ahora, ¿cuál sería el término general de la sucesión? Llamando n a un número natural cualquiera sería la expresión n partido por n más uno. Sí.

Mediante este ejemplo vamos a ver una propiedad que tienen algunas sucesiones, entre las cuales se incluye esta. Observemos que cuando más avanzamos en los términos de esta sucesión, más nos vamos aproximando a un número racional. En la sucesión de término general n partido por n más uno, ¿observan ustedes que se cumple esta propiedad? Bueno, veo que los términos van creciendo en valor.

Por ejemplo, dos tercios es mayor que un medio, y a su vez tres cuartos es mayor que dos tercios, y así sucesivamente. Pero no llego a ver el número racional hacia el que se aproximan. Bueno, como tú dices, yo también observo que la sucesión va creciendo.

Si nos fijamos en términos muy avanzados, por ejemplo, en el término que ocupa el lugar novecientos noventa y nueve, que sería nueve partido por mil, vemos que se aproxima mucho a uno, ya que su valor es novecientos noventa y nueve milésimas. Si tomamos un término todavía más adelante, aún se aproxima más a uno. Bueno, muy bien.

Este es el procedimiento seguido para saber si una sucesión tiende hacia un número o no. En este caso, si existe el número y es el uno, diremos entonces que la sucesión converge hacia el uno, o también que su límite es el número uno. Entonces, ¿cuál sería el criterio para saber si una sucesión es o no convergente? Una sucesión de números racionales es convergente en el conjunto de los números racionales cuando existe un número racional tal que cuanto más avanzamos en los términos de la sucesión, más nos aproximamos a ese número racional.

Dicho número se llama límite de la sucesión. ¿Entienden ustedes esta idea de convergencia? Bueno, creo que es una idea bastante intuitiva. Bueno, en realidad, esta no es una definición rigurosa de límite.

Piensen ustedes que el término aproximarse que hemos utilizado no tiene ningún rigor matemático. A pesar de ello, no enunciamos el concepto de límite por considerar que se sale fuera de las posibilidades del medio radiofónico que estamos utilizando. No obstante, vamos a intentar exponer una definición de convergencia que se acerque más a la definición rigurosa, ya que tenemos todos los elementos intuitivos necesarios para ello.

Una sucesión de números racionales es convergente en el conjunto de los números racionales cuando existe un número racional tal que la diferencia, en valor absoluto, entre un término de la sucesión. Y este número se puede hacer tan pequeña como queramos, con tal de que el término de la sucesión sea suficientemente avanzado. Creo que esta definición habría que estudiarla más detenidamente.

Estoy de acuerdo. Pienso que a base de escribirla podríamos llegar a asimilarla completamente. Les propongo que antes de que se les olvide lo que hemos dicho en esta emisión, profundicen en el tema mediante la lectura de sus libros de texto.

En la próxima emisión estudiamos un tipo de sucesiones de números racionales de gran interés para introducir el número real. Serán las sucesiones de Cauchy.