

AC 14 20

Introducción a las ciencias físico-naturales. Guión 11. Oscilaciones.

Doctor Antonio Rueda de Andrés. El movimiento oscilatorio es uno de los movimientos más importantes que podemos observar en la naturaleza. Se dice que una partícula oscila cuando se mueve periódicamente en torno a una posición de equilibrio.

Por ejemplo, la lenteja de un péndulo describe un movimiento oscilatorio en torno a la posición vertical de equilibrio, y otro tanto cabe decir de un cuerpo situado en el extremo de un muelle previamente estirado. Los cuerpos que ejecutan movimientos oscilatorios deben encontrarse confinados en cierta región del espacio. En realidad, esta es una característica propia no sólo de los osciladores, sino en general de todos los cuerpos que describen movimientos periódicos.

Sin embargo, como ya hemos indicado antes, las oscilaciones se caracterizan por ser movimientos generalmente de pequeña amplitud en torno a posiciones de equilibrio. En definitiva, tendremos que el movimiento oscilatorio corresponde a una categoría especial de movimientos periódicos. Es decir, todos los movimientos oscilatorios son periódicos, pero no todos los movimientos periódicos serán oscilatorios.

Recordemos, por ejemplo, que el movimiento orbital de un satélite alrededor de la Tierra es periódico, pero evidentemente no es oscilatorio. De esta forma, aun cuando se requerirá un marco de representación propio para los movimientos oscilatorios, el formalismo general utilizado para describir movimientos periódicos podrá aplicarse al estudio de las oscilaciones. Así ocurrirá, por ejemplo, con la definición de parámetros tales como el período o la frecuencia del movimiento.

Pero podríamos preguntarnos, ¿tan importantes son en física los péndulos y los resortes como para justificar el estudio detallado de su movimiento? En realidad, no es que los péndulos y los muelles sean en sí mismos muy importantes para los físicos. Lo que ocurre es que las ecuaciones que describen los movimientos de tales sistemas en diversas situaciones corresponden a problemas de sumo interés. Así, por ejemplo, observemos que los átomos de un sólido oscilan en torno a posiciones de equilibrio, localizadas en los llamados nudos de la red cristalina.

La naturaleza de estas oscilaciones es en muchos casos de índole térmica, pero en otros su justificación debe encontrarse en el marco de la física cuántica. De una manera análoga, los átomos de una molécula poliatómica oscilan unos con relación a los otros. Estos ejemplos justifican ya de por sí el estudio de las oscilaciones, pero todavía aún hay más.

En los casos reseñados, lenteja de un péndulo, cuerpo suspendido de un resorte, átomos o moléculas de un sólido o átomos en una molécula, el movimiento de cada sistema viene determinado, como ya sabemos, por la correspondiente ecuación de movimiento, fuerza igual a derivada temporal del momento lineal. Esta ecuación más o menos compleja, según el

número y la forma de las fuerzas actuantes sobre el cuerpo en cuestión, recibe en la matemática el nombre genérico de ecuación diferencial. En general, siempre que tengamos una ecuación en la que aparezcan derivadas, diremos que es una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales aparecen, como vemos en mecánica, en relación al movimiento de los cuerpos, pero sirven también para describir otros procesos de gran interés en la física y en la ciencia en general. Así ocurrirá, por ejemplo, con las oscilaciones de las cargas que se desplazan a lo largo de un circuito eléctrico, con las vibraciones de un diapason que origina ondas sonoras, con las vibraciones de los electrones en un átomo que dan lugar a ondas luminosas, con los mecanismos de regulación propios de los sistemas cibernéticos, y para terminar, valga por caso, con ciertas interacciones que aparecen en reacciones químicas. En el ámbito de la biología, el crecimiento de una población de individuos a expensas de otra es un ejemplo más de un fenómeno que puede ser descrito en términos matemáticos mediante una ecuación diferencial.

No es nuestra intención cansar al estudiante con más ejemplos, pero sí queremos hacer énfasis en el hecho de la existencia de fenómenos de naturaleza bien diversa, tanto en la física como en otras ciencias, en la química o en la biología, por ejemplo, capaces de ser representados por ecuaciones diferenciales similares a las que rigen las oscilaciones de partículas en torno a sus posiciones de equilibrio. Creemos, por tanto, que el estudio de las oscilaciones está más que justificado. En el texto se estudia el movimiento armónico simple.

¿Cuáles son sus características más importantes? Es muy posible que el sistema mecánico más simple, cuyo movimiento venga dado por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, sea el oscilador armónico. Por ejemplo, una masa ligada a un muelle. Los sistemas clásicos, que constituyen ejemplos de osciladores armónicos, se caracterizan por su linealidad.

Un sistema mecánico o eléctrico, pongamos por caso, se dice que es lineal cuando la respuesta a un estímulo es directamente proporcional a éste. Una gran cantidad de fenómenos físicos presentan, siquiera sea en primera aproximación, este carácter lineal, siempre que el máximo valor del estímulo sea suficientemente pequeño. Gráficamente, esto se traduce en que si representamos la función que nos relaciona estímulo-respuesta, la curva obtenida podrá aproximarse por una línea recta, con tal de que el intervalo de valores considerado sea lo suficientemente pequeño.

En general, una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes corresponde a la suma de varios términos, cada uno de los cuales es una derivada de la variable dependiente con respecto a la variable independiente y multiplicada por una cierta constante. En el caso que nos ocupa, la variable dependiente es la coordenada de posición, lineal o angular, y la variable independiente es el tiempo. Observemos que las ecuaciones de movimiento 11.7 y 11.12 son ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, nombre que nace del hecho de que la única derivada incluida en la ecuación es una derivada segunda.

Estas ecuaciones corresponden al llamado oscilador armónico simple. En este caso sólo hay

una fuerza actuante sobre la partícula o cuerpo considerado, fuerza que es proporcional precisamente en cada instante a la coordenada de posición ocupada con relación a la posición de equilibrio. De esta forma, si tenemos un peso en el extremo de un muelle y lo estiramos el doble de una distancia dada, la fuerza recuperadora que actúa es también el doble que la fuerza correspondiente al primer alargamiento, comunicando al peso una aceleración asimismo el doble de la primera aceleración.

Igualmente, la velocidad en un instante dado es también el doble, y lo mismo puede decirse de la distancia recorrida en un intervalo de tiempo dado. Además, el peso deberá recorrer una distancia doble hasta alcanzar la posición de equilibrio, puesto que el alargamiento fue el doble. Debemos notar, sin embargo, que tanto en un caso como otro tardará el mismo tiempo en alcanzar la posición de equilibrio.

Matemáticamente, todo lo anterior tiene su razón de ser en el hecho de que si multiplicamos ambos miembros de la ecuación diferencial por una constante, entonces todas las derivadas, en este caso una sola, aparecerán multiplicadas por dicha constante. Así pues, dada una solución de la ecuación de movimiento, el producto de esta solución por una constante arbitraria será también una solución de la ecuación diferencial. Esta es una propiedad característica de las ecuaciones diferenciales lineales.

Consecuencia de esta propiedad es asimismo la superposición de oscilaciones, los efectos de distintos estímulos pueden superponerse linealmente. Hasta ahora hemos supuesto tácitamente que sobre el cuerpo oscilante solo actúa la fuerza recuperadora o elástica proporcional a la desviación del equilibrio y que es conservativa. En tal caso decimos que el movimiento oscilatorio es armónico simple, pero ¿qué ocurre si sobre el sistema actúan además fuerzas disipativas? En tal caso, como ocurre en la práctica, con un péndulo oscilando en el aire o en un líquido más o menos viscoso, el sistema acaba por detenerse amortiguándose sucesivamente el movimiento por el efecto de la fricción asociada a la interacción del oscilador con las moléculas del medio en el que se encuentra inmerso.

Este es un ejemplo típico de pérdida de energía mecánica en forma de calor, proceso que como sabemos tiene un carácter esencialmente irreversible. Entonces la energía mecánica no será ya una constante del movimiento, sino que obedecerá a una ley exponencial de disminución con el tiempo. Como se ha indicado previamente, la energía es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud.

Antes esta era constante y por tanto aquella también lo era. En el caso presente, al disminuir la una, también decrece la otra. Es fácil imaginar que ahora el movimiento no vendrá expresado por 11.9 u 11.14. Formalmente, las consideraciones anteriores se traducirán en la inclusión de un término adicional en la ecuación diferencial del movimiento que dé cuenta del proceso de fricción al que se encuentra sometido el sistema.

La interacción entre un medio y un cuerpo es un proceso complicado que en última instancia hace que la energía del cuerpo móvil se transforme en calor, energía degradada no

recuperable. Este proceso no es solo puramente mecánico, sino que un estudio detallado del mismo involucraría también otras ramas de la física. Desde un punto de vista meramente mecánico, fenomenológico, aquel puede describirse definiendo una cierta fuerza adicional que aparece como resultado del mismo movimiento y que tiene dirección opuesta a éste, retardándolo por consiguiente.

Esta fuerza, representación macroscópica de interacciones microscópicas, la conocemos con el nombre de fricción o rozamiento. Para velocidades suficientemente pequeñas, puede tomarse como proporcional a la velocidad instantánea del móvil, suposición que confirma la experiencia, siendo su sentido opuesto al de dicha velocidad. La constante de proporcionalidad describe la interacción del cuerpo con el medio.

Introduciendo esta fuerza en la ecuación de movimiento del sistema, que seguirá incluyendo la fuerza recuperadora o elástica, obtendremos una ecuación diferencial algo más complicada que las ecuaciones 11.7 u 11.12. Resolviendo la nueva ecuación por procedimientos que rebasan el ámbito de este curso, encontramos como solución expresiones similares a 11.9 u 11.14. Con la diferencia de que ahora, la amplitud no será constante, sino una función exponencial que muestra la disminución de esta magnitud con el tiempo. Teóricamente, el sistema se detendría al cabo de un tiempo infinito. En la práctica basta un tiempo suficientemente largo, propio o característico de la interacción con el medio, para conseguir tal propósito.

La fricción también afecta a la frecuencia de las oscilaciones. Al retardar el movimiento, aquella aumenta el periodo. Es decir, disminuye la frecuencia de las oscilaciones.

Sin embargo, cuando la fricción es muy pequeña, este cambio es igualmente muy pequeño, por lo que puede despreciarse este efecto en un buen número de casos. Pero por otro lado, cuando la fricción es suficientemente grande, el retardo puede ser tan considerable que el movimiento se amortigüe sin oscilación. Esto es lo que se llama amortiguamiento aperiódico.

Como acabamos de decir, en cualquier sistema oscilante, siempre ocurren procesos de fricción de algún tipo. Las oscilaciones naturales, que resultan de la acción de una perturbación inicial, son por tanto amortiguadas en el transcurso del tiempo. Para producir oscilaciones no amortiguadas en un sistema, es necesario, por consiguiente, compensar la pérdida de energía debido a la fricción.

Esto se puede lograr, por ejemplo, por medio de fuentes de energía externas al sistema oscilante. Un caso sencillo es la acción sobre un sistema de una fuerza externa variable, que varía armónicamente con el tiempo con una cierta frecuencia, diferente en general de la frecuencia propia que caracteriza las oscilaciones libres naturales del sistema. Bajo la acción de esta fuerza, el sistema oscila con la frecuencia de variación de la fuerza.

Estas se llaman oscilaciones forzadas. Entonces, el movimiento del sistema será en general una superposición de ambas oscilaciones, las oscilaciones naturales con la frecuencia propia del

sistema y las oscilaciones forzadas con la frecuencia de la fuerza externa aplicada. Una discusión detallada de estas cuestiones rebasa con mucho nuestros propósitos actuales.

Observemos, sí, en cambio, que la ecuación diferencial del movimiento se complica algo más al incluir una nueva fuerza de carácter oscilante. Antes de finalizar esta cuestión, debemos considerar un fenómeno de suma importancia, a veces deseable, en otras ocasiones no, que aparece muy difundido en la naturaleza y en la técnica. Este fenómeno, llamado resonancia, consiste en una amplificación de las oscilaciones forzadas.

La resonancia, tanto más apreciable cuanto menor es la fricción, se presenta cuando la frecuencia de la fuerza oscilante externa aplicada coincide con la frecuencia propia de las oscilaciones naturales del sistema. El origen de la amplificación de las oscilaciones por resonancia puede comprenderse considerando la relación entre las fases de la fuerza externa y de la velocidad del oscilador. Cuando las frecuencias a que antes nos referíamos son distintas, hay una cierta diferencia de fase entre la fuerza oscilante y la velocidad del sistema, ya que dicha fuerza tiene dirección opuesta a la velocidad durante una cierta fracción de tiempo de cada periodo, existiendo entonces una tendencia a que el movimiento sea retardado en lugar de acelerado.

En la resonancia, en cambio, las fases de la fuerza y de la velocidad son las mismas. De esta forma, la fuerza siempre actúa en la dirección del movimiento, ayudándole continuamente.