

AC 15 39

Este tema puede parecer demasiado teórico a nuestros alumnos, y les aconsejamos que extraigan únicamente una idea acerca de las particiones de un intervalo y del estudio de las sumas inferiores y superiores para llegar a la definición de función integrable. Es decir, quizá a lo mejor les resulten muy difícil las demostraciones y en un primer momento las pueden pasar por alto. Nada más coger los conceptos de partición, de suma inferior, suma superior, ver cómo se hacen todas estas particiones para llegar a función integrable.

Claro, porque en el concepto de integral es importante entender bien la noción de partición y ver lo que es la suma inferior y la suma superior, aunque, como dices, se puedan obviar las demostraciones. Lo que importa es saber cuándo una función es integrable. Tienen que saber esto.

Tienen que saber cuándo una función es integrable, que no será si el supremo del conjunto de las sumas inferiores es igual al ínfimo del conjunto de las sumas superiores. Sabiendo ya si una función tiene la propiedad de ser integrable, el concepto importante es el de integral, que geométricamente se lo entiende como el área. Tienen en el libro hecho una gráfica para que vean realmente cómo es la integral entre a y b de una función, que es el área comprendida bajo la gráfica de la función.

También son muy importantes las propiedades de las funciones integrables y de la integral. Repito ahora porque en este tema hay muchas demostraciones que pueden resultar de alguna dificultad para nuestros alumnos y las pueden obviar. ¿Y con respecto a los teoremas fundamentales del cálculo? En el primer teorema fundamental del cálculo, si tenemos una función integrable en un intervalo cerrado a y b , y c es un punto de ese intervalo, y la integral de c a x de f de t diferencial de t es igual a g de x , entonces, si f es continua, se cumple que la derivada de g es igual a f . Este teorema es muy importante y lo utilizaremos en el tema cuarto de esta unidad que está muy relacionado con este primero.

El segundo teorema fundamental del cálculo nos dice que si f es integrable y g es una función tal que la derivada de g es igual a f , entonces la integral entre a y b de f es igual a g de b menos g de a . ¿Y este primer tema de la sexta unidad termina con el cambio de variable? Por último, en este tema también se plantea el cambio de variable. Es muy importante y ya lo verán ustedes en el tema cuarto cómo para resolver una integral utilizamos muchas veces un cambio de variable. Resumiendo, en este tema es importante que sepan lo que es una función integrable aunque el principio, cómo se llega a esto, no tienen que estudiarse las demostraciones sino coger la idea de cómo llegamos a una función integrable.

Saber las propiedades de las funciones integrables, los teoremas fundamentales del cálculo y este planteamiento del cambio de variable. Con este resumen que acabas de hacer de lo fundamental del primer tema de la sexta unidad, esperamos que los alumnos no tengan ninguna dificultad en seleccionar exactamente lo importante, aquello que tienen que estudiar.

Y podemos pasar al tema siguiente, que es el tema segundo de esta unidad, que trata de funciones exponenciales y logarítmicas.

Es una lección que también tendrá dificultades o cierta complejidad para poder ser aprendida, ¿verdad Paloma? Realmente de este tema no pedimos demasiado, lo único que se exige es que conozcan las funciones logarítmicas y exponenciales, cuáles son sus propiedades, cuál es su dominio de definición, sus puntos notables, más o menos que sepan la gráfica de la función, sobre todo, pues, más o menos saber si es creciente, si es decreciente, si toma valores positivos, si toma valores negativos, etc. ¿Podías precisar más qué propiedades o qué conceptos hay que dominar en cada una de estas funciones? Empecemos por la función logarítmica. De la función logarítmica se deberán conocer las propiedades, como la del logaritmo de un producto, logaritmo de un cociente, logaritmo de una potencia, cómo se operan con los logaritmos.

Es decir, este tema es a nivel práctico y es lo que van a necesitar usar cuando hagamos derivadas, integrales, límites, etc. Entonces, también deberán saber, por ejemplo, que no está cotada, que el logaritmo de 1 es 0, que sólo está definida para valores mayores que 0, que el logaritmo en base a de a es 1, es decir, por ejemplo, el logaritmo en base 10 de 10 sería 1, o el logaritmo neperiano de e es 1, etc. Es decir, toda esta serie de propiedades que son muy importantes a la hora de manejar estas funciones.

Es decir, lo van a utilizar como una herramienta. También habrá que conocer su derivada. Recuerden que en el tema 3 de la unidad 5 estudiábamos derivadas, pero las derivadas de estas funciones que vamos a ver aquí, tanto logarítmica como exponencial, como las trigonométricas, no se han visto ya que no habíamos definido estas funciones.

Entonces, ahora deberán repasar el tema de derivada para hallar las derivadas de estas funciones. Sí, recuerdo que en el programa anterior adelantábamos el concepto de derivada, explicábamos el concepto de derivada, pero no de estas funciones y decíamos que cuando estudiáramos estas funciones, habría que retomar el concepto de derivada, pero aplicado a estas funciones y saber derivar estas funciones. Y con respecto a la función exponencial, hemos visto la logarítmica, ¿qué pasa con la función exponencial? ¿Cuáles son las propiedades y conceptos fundamentales a retener? De la función exponencial deben conocerse cuestiones parecidas.

Muy importante es ver que la función logarítmica y la exponencial son inversas. Es decir, que lo que en una función es imagen pasa a ser original en la otra. También es interesante ver que la gráfica de las dos funciones son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

Es decir, una es simétrica de la otra. Por ejemplo, si tomamos la función logarítmica de base e , es decir, el logaritmo neperiano, y si tomamos la función exponencial de base e , vemos que, por ejemplo, si logaritmo neperiano de 1 es 0, al contrario, tendremos que e elevado a 0 es 1. Es decir, lo que antes era original pasa a ser imagen. También es muy interesante ver que según sea la base mayor o menor que 1, las funciones van a ser crecientes o decrecientes.

Por eso es bastante interesante conocer más o menos cómo es la gráfica de la función para luego, a la hora de hacer problemas, ya sean de límites, de derivadas o de integrales. Es fundamental entender que la función exponencial es totalmente inversa a la función logarítmica. ¿Hay algún otro aspecto más de esta segunda lección? Por último, es también muy importante saber aplicar la regla del hospital a cálculo de límites de este tipo de funciones.

Es decir, nosotros hemos estudiado la regla del hospital y la hemos aplicado a las funciones que conocíamos. Ahora también las vamos a aplicar a estas funciones y también a las trigonométricas que veremos en el capítulo siguiente. También este tipo de funciones es interesante porque mediante las exponenciales se pueden reducir ciertas indeterminaciones.

Entonces, va a ser muy importante conocer estas exponenciales para poder realizar esos límites que nos dan indeterminaciones y que se evitan mediante estas funciones. Es decir, en este tema segundo lo que deben conocer son las funciones logarítmicas y exponenciales para trabajar con ellas, es decir, como herramienta que vamos a utilizar en los distintos temas de la asignatura. En este tema también las exigencias son parecidas.

Conocer las propiedades de estas funciones, su dominio, sus puntos notables, una idea de su gráfica, su derivada, si es continua o no, etc. Es decir, que vamos a intentar conocer estas funciones. En principio, en el libro les puede resultar un poco difícil el planteamiento y pueden acceder a ellas más fácilmente estudiando las funciones seno y coseno partiendo de las razones trigonométricas.

Si tenemos un triángulo rectángulo y consideramos un ángulo agudo, la razón trigonométrica seno de ese ángulo viene definida por el cateto opuesto partido por la hipotenusa. Es decir, el seno de un ángulo es el cateto opuesto partido por la hipotenusa. De la misma forma, el coseno de ese ángulo agudo es el cateto contiguo partido por la hipotenusa.

Obtenemos así las razones trigonométricas que son independientes del triángulo elegido. Esto se demuestra y ya tenemos así definidas unas funciones puesto que nosotros podemos darle a cada valor del ángulo un valor del seno de ese ángulo. Tenemos así la función seno y la función coseno.

Quizá pueden mirar en otros libros esta construcción de las funciones seno y coseno que les resulten más sencillas que lo que viene en el libro. Después de esto podemos estudiar las funciones, por ejemplo, seno también seno y coseno que son bastante parecidas pues son funciones continuas. Tenemos que saber los valores del seno para cero, para π medios, para π cuartos, etc.

Es decir, los valores más notables. Puesto que muchas veces en una integral nos van a aparecer si tenemos la integral de las funciones trigonométricas y tenemos límites de integración, vamos a tener que averiguar al final de todo, por ejemplo, cuánto vale el coseno de π medios. Pongamos por caso.

Es decir, que hay que conocer todos esos valores notables de las funciones trigonométricas. También debemos saber su derivada. Es bastante fácil.

La derivada de seno de x es coseno de x y la derivada de coseno de x es menos seno de x . También es muy importante conocer que estas funciones son periódicas. Es decir, que se va repitiendo su gráfica. Toma los mismos valores.

Por ejemplo, en la función seno va tomando diferentes valores, desde cero hasta dos π . A partir de ahí, la función se va repitiendo. La gráfica de la función es un calco de lo anterior.

Además, por ejemplo, entre cero y π toma valores positivos y entre π y dos π va tomando los mismos valores que antes, pero negativos. Todo esto nos puede ayudar para conocer cómo es la función y hallar sus distintos valores. Lo mismo ocurre con la función coseno.

Conociendo las funciones seno y coseno se pueden conocer las demás, porque todas vienen deducidas a partir de ellas. Por ejemplo, tangente de un ángulo viene definido como el seno de ese ángulo partido por el coseno. A partir de ahí, también vamos a definir una función.

En esta función podemos tener algún problema, ya que tenemos un cociente. Entonces, cuando el coseno del ángulo sea cero, no tendremos definida esa función. Es decir, que al igual que las funciones seno y coseno son continuas en todos los puntos, la función tangente no siempre va a ser continua.

Va a tener unos puntos de discontinuidad. Pero también va a ser periódica. Vamos a ver una serie de propiedades y su gráfica, que nos va a ayudar bastante para hallar los valores de la función.

De la misma manera, tendríamos las funciones secante, cosecante y cotangente. La secante viene definida como la inversa del coseno, la cosecante como la inversa del seno, y la cotangente como la inversa de la tangente. Por último, en este tema, también es muy interesante definir las funciones inversas arcoseno, arco coseno y arco tangente.

Con estas funciones ya tenemos definidas todas las trigonométricas y podremos trabajar con ellas. No hay que olvidar también las derivadas de todas estas funciones, que luego nos van a aparecer, por ejemplo, en las integrales y tendremos que saber las derivadas aparte ya del problema simple de la derivación de estas funciones. Con esto terminamos este tema tercero.

Es decir, que las funciones trigonométricas, como en el tema segundo, van a ser una herramienta que vamos a utilizar nosotros para trabajar en las distintas cuestiones que se nos planteen. Debemos conocer sus valores más notables, cómo es su gráfica más o menos, qué son periódicas, cuál es su derivada, y también, no se olviden, que tendremos que aplicar muchas veces la regla del hospital para hallar límites en que aparezcan las funciones trigonométricas. Por lo tanto, muy importante es saber seno de cero, coseno de cero, seno de π medios, etc.

Todos estos valores notables de las funciones. Este tema de las funciones trigonométricas puede parecer un poco complejo, pero realmente no lo es, porque son muy pocos los conceptos que hay que recordar, como son los que has comentado de los valores notables, seno de cero, coseno de cero, de π medios, de π cuartos, etc. También entender la gráfica de cada una de las funciones trigonométricas, entender cómo cada concepto trigonométrico, cada función trigonométrica, se define a partir del anterior, es decir, la relación entre seno, coseno, cotangente, secante, cosecante, etc.

También saber aplicar, en este caso, como en el caso de la lección anterior, la regla del hospital para resolver límites, donde los valores notables deben ser muy bien conocidos. Y no olvidar que estas funciones trigonométricas pueden aparecer en cálculos de integrales, en realizar ejercicios sobre integrales. Y esto ya nos lleva a la lección última de esta sexta unidad didáctica, que va a tratar precisamente de esto, el cálculo de primitivas.

En estas lecciones hemos tenido herramientas en estas lecciones de esta sexta unidad desde un punto de vista práctico para hacer problemas. Pero ya, si pasamos al tema del cálculo de primitivas, que es donde verdaderamente se plantean las dificultades mayores, ¿qué podemos decir de este tema? Me imagino que lo fundamental de él es que es un tema práctico, fundamentalmente práctico. En principio, debemos saber la definición de primitivas, es decir, que dada una función f continua en un intervalo, llamamos primitiva de f a una función g que cumple que su derivada es f . Era lo que habíamos definido en el primer teorema fundamental del cálculo.

Entonces ya ahora a eso le llamamos primitiva. Realmente, cuando nosotros hallamos la primitiva de una función, lo que estamos haciendo es la operación inversa de hallar la derivada. Es decir, hallamos la derivada y la operación inversa es hallar la primitiva de una función, ya que la primitiva de una función es otra función que al derivarla nos da la dada.

Realmente, cuando tenemos que calcular una integral, lo que tenemos que hacer es calcular primitiva. Es decir, una primitiva de la función. Esto nos lleva a que podemos siempre comprobar de una manera sencilla si está hecha bien una integral.

Es decir, si está hallada bien la primitiva de una función, puesto que derivamos esta y observamos si coincide con la función dada. Dada una primitiva de una función cualquiera, otra primitiva de esta función, nada más se diferencia de la primera en una constante. Es decir, que no es que haya una primitiva de la función, sino que hay un conjunto de primitivas de una función.

Como ven, la primitiva es la función tal que al derivarla nos da la dada. Por lo tanto, si yo tomo una función y le sumo cualquier constante, como la derivada de una constante es cero, voy a obtener la misma función. Es decir, que realmente no tenemos la primitiva de una función, sino un conjunto de primitivas de una función.

Aunque a veces simplemente se dice primitiva la primitiva de la función. Pero no hay que

olvidar que es un conjunto de primitivas. Sí, en realidad hablamos de primitiva, pero lo que hay son muchas primitivas.

Y verdaderamente el cálculo de primitivas es una cosa simple. Calcular la primitiva es resolver la integral. Y como os he explicado hay un método muy fácil para saber si esto se hace bien, que es hacer la derivada, puesto que la integración se puede definir como el fenómeno matemático o la operación matemática, mejor dicho, inversa a la derivación.

Entonces, si calculamos la derivada y nos sale la función que se nos ha propuesto, el ejercicio está bien hecho. De todas maneras, sería interesante que aclaráramos esto con algún ejemplo. ¿Podrías proponernos algún ejemplo? La primitiva de la función $2x$ sería x al cuadrado, ya que al derivar x al cuadrado obtenemos $2x$.

Pero también otra primitiva sería x al cuadrado más 5. Pues al derivar x al cuadrado más 5, también se obtiene $2x$, ya que como hemos dicho antes, la derivada de una constante es 0. Y 5 es una constante, por lo tanto la derivada de 5 sería 0. Al conjunto de las primitivas de una función f se llama integral de f . A esta integral se le suele llamar integral indefinida. Y es el conjunto de todas las primitivas de una función. Hay que tener en cuenta que esta es una función.

Es decir, que la integral indefinida es una función. Y no hay que confundirla con la integral de una función en un intervalo que se llama integral definida y que es un número real. Ya que por el segundo teorema fundamental del cálculo veíamos que la integral entre a y b de f de x era igual a g de b menos g de a . Es decir, que lo que obtenemos es un número que su significado geométrico como ya vimos en ese tema es el del área comprendida bajo la curva que define la función en ese intervalo.

Entonces, muy importante, la integral indefinida es una función la integral definida es un número y que representa además un área. Hay funciones cuyas primitivas son muy sencillas de obtener. Por ejemplo, una primitiva de coseno de x es seno de x . Repito, una primitiva de coseno de x es seno de x . Porque si nosotros derivamos seno de x , su derivada es coseno de x . Asimismo, tenemos otra serie de funciones cuyas primitivas son inmediatas.

Son muy fáciles de conocer. Estas primitivas inmediatas debemos saberlas porque si tenemos una función más compleja de la cual no sabemos hallar una primitiva inmediatamente, la podremos descomponer en funciones más sencillas cuyas primitivas sean inmediatas. Por lo tanto, deberemos conocer las primitivas de las funciones más sencillas.

Un cuadro de estas primitivas lo tienen ustedes en la página 339 del libro. Bien, cuando la función es indefinida, la integral, lo que representa es el conjunto de todas las primitivas y no algo muy concreto que es un número real cuando la función es definida. La mayor dificultad que se plantea aquí es efectivamente el cálculo de primitivas en expresiones que sean un poco complejas.

Entonces, ya se trata de trucos de cálculo que solamente se pueden aprender sobre la base de realizar muchos ejercicios. Si se trata de expresiones muy complejas, hay que intentar ir descomponiendo esa expresión compleja en otras más simples e ir calculando por partes las primitivas de las funciones sencillas cuya integral es inmediata y se conoce tal y como aparece en la página 339 del libro. Por tanto, ese cuadro de esa página debe ser memorizado, es decir, saber exactamente cuál es la integral que corresponde a las funciones más sencillas.

Pero, en fin, cuando estamos ante cálculo de primitivas, ante cálculo de integrales que no sean sencillas, que sean difíciles, que planteen dificultades, ¿qué recomendación podríamos hacer? Muchas veces hallar la primitiva de una función no es inmediato y hay que recurrir a procedimientos más complejos para averiguarlos. Uno de ellos es la integración por partes que se basa en la fórmula integral de u diferencial de v igual a u por v menos la integral de v por diferencial de u . Para aplicar este método hay que considerar parte del integrando como u y lo restante como diferencial de v , teniendo en cuenta que como hay que hallar v , diferencial de v deberá ser una función de la cual no conozcamos una primitiva. No hay que olvidar que la derivación siempre la sabemos hacer, es cuestión de aplicar fórmulas y sin embargo la integración, el hallar una primitiva, no siempre es posible de una manera sencilla e inmediata.

Otra fórmula para resolver el problema de hallar una primitiva es efectuar un cambio de variable. En este caso lo que puede ser complicado algunas veces es obtener el cambio adecuado, pero la mecánica del procedimiento es sencilla. También podremos aplicar la descomposición en fracciones simples para resolver casos de funciones racionales que son un tipo muy fácil de resolver sin más que conocer los pasos a seguir en cada caso.

También puede ser útil conocer algunas fórmulas trigonométricas sencillas para aplicar al cálculo de primitivas, como pueden ser que seno al cuadrado de x más coseno al cuadrado de x es 1, etc. Método de integración por partes, método del cambio de variable, descomposición en fracciones, son procedimientos que hay que conocer para resolver ejercicios de integrales, sobre todo aprendiéndolos viendo muchos modelos de ejercicios resueltos. Y con respecto a este último tema de la sexta unidad didáctica ¿hay algún aspecto más que podríamos comentar? Por último, en este curso se le da poca importancia por ser más complicado al cálculo de primitivas de funciones irracionales, es decir, que su estudio se puede hacer más o meramente.

Pero todo lo demás de este tema es muy importante y deberán hacer muchos ejercicios del mismo. Con esto, tenemos comentada la sexta y última unidad de las unidades didácticas de matemáticas especiales. Buenas noches.

Pues muchas gracias Paloma Pantoja por tus explicaciones, confiamos en que los alumnos hayan entendido que es necesario ver muchos modelos de ejercicios resueltos y hacer muchos ejercicios para dominar esta lección, que de esto seguro que cae algo en el examen final y gracias por haber venido y asimismo buenas noches a todos, aunque hay otro programa de matemáticas especiales en donde de modo específico orientaremos sobre la realización del

examen final. Con el curso de acceso despedimos un día más las emisiones de la Universidad Nacional de Educación a Distancia. Durante dos horas y media nos hemos ocupado de la Universidad de temas relacionados con la ciencia y la cultura.

Ya sabéis, de lunes a viernes por Radio 3 de Radio Nacional de España en frecuencia modulada, Radio Cadena Española y otras emisoras colaboradoras. Muchas gracias por vuestra atención y buenas noches. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org