

AC 15 4

Matemáticas especiales, guión número 5, relación de equivalencia, conjunto cociente, fecha de emisión 31 del 10 del 79. Vamos a repasar hoy el concepto de relación binaria. ¿Quién podría decirme lo que es una relación binaria definida sobre un conjunto? Pues yo mismo.

Una relación binaria definida sobre un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano de A por A . Y los elementos de este conjunto son pares ordenados y se dice que el primer elemento del par está relacionado con el segundo. Si ahora consideramos el conjunto de los días del año, ¿podrían definir alguna relación binaria en este conjunto? Sí, un día está relacionado con otro si pertenecen al mismo mes. Muy bien.

¿Cumple esta relación binaria la propiedad reflexiva? Sí, pues una relación cumple la propiedad reflexiva si todo elemento del conjunto está relacionado consigo mismo. En nuestro caso, cualquier día del año está relacionado consigo mismo, pues pertenece al mismo mes. Por ejemplo, el 3 de marzo está relacionado con el 3 de marzo, pues es claro que ambos pertenecen al mismo mes.

Perfectamente. ¿Será además simétrica? Bueno, una relación cumple la propiedad simétrica si para todos los elementos A y B del conjunto, tales que A está relacionado con B , se verifica que B está relacionado con A . En este caso, si un día pertenece al mismo mes que otro, se verifica que este segundo día pertenece al mismo mes que el primero. Estupendo.

¿Recordarán que el último día acabamos la emisión enunciando dos propiedades más que pueden cumplir las relaciones binarias? Sí, la propiedad antisimétrica y la propiedad transitiva. Exactamente, aunque hoy solamente nos vamos a limitar a estudiar la propiedad transitiva. Vamos a recordar el enunciado de esta propiedad.

¿Lo recuerda usted, señorita? No recuerdo yo exactamente cuál es el enunciado de esta propiedad, pues si bien la he estudiado estos días, no entiendo totalmente su significado al no haber visto su aplicación. En un ejemplo. A mí me ocurre lo mismo.

Bueno, bueno, no se preocupen. Recordemos primero la propiedad y después pondremos ejemplos. Se dice que un conjunto A en el que se ha establecido una relación binaria cumple la propiedad transitiva si para cualesquiera tres elementos de dicho conjunto, A , B y C , tales que A está relacionado con B y B está relacionado con C , entonces necesariamente se verifica que A está relacionado con C . Profesor, ¿podría ponernos algún ejemplo? Eso mismo voy a hacer ahora.

Volvamos al ejemplo de los días del año y a la relación binaria definida de la siguiente forma. Un día del año está relacionado con otro día del año si ambos pertenecen al mismo mes. ¿Se cumple en esta relación la propiedad transitiva? Pues sí, porque si un primer día está relacionado con un segundo día y este segundo día está relacionado con un tercero, quiere decir esto que el primero y el segundo pertenecen al mismo mes y que el segundo y el tercero

también pertenecen al mismo mes.

Por lo tanto, el primero y tercer día pertenecen a ese mismo mes. Bueno, lo veo claro. ¿Se cumplirá también esta propiedad en el ejemplo de la relación padre-hijo? Supongo que se refiere a la relación que establecimos entre los habitantes de Cádiz según la cual una persona está relacionada con otra si la primera es padre de la segunda.

Así es, así es. Pues intente usted misma comprobar si en esta relación se cumple o no se cumple la propiedad transitiva. Vamos a ver.

Lo primero que tengo que hacer es tomar tres personas, por ejemplo, Juan, Pepe y Tomás de ese conjunto, de forma que Juan es padre de Pepe y Pepe es el padre de Tomás. Para que se cumpla la propiedad se tiene que verificar necesariamente que Juan sea padre de Tomás. Pero se verifica que Juan no es padre de Tomás, sino su abuelo.

Luego esta relación no cumple la propiedad transitiva. Entonces esta relación no cumple ni la propiedad reflexiva, ni la simétrica, ni la transitiva. Y sin embargo, el ejemplo de los días del año que están relacionados, si pertenecen al mismo mes, cumple las tres propiedades.

Muy bien. Me alegro de que se haya dado cuenta de esta peculiaridad, pues nos va a ayudar en el siguiente paso de nuestra construcción. Vamos a limitarnos ahora a determinado tipo de relaciones binarias.

Llamaremos relación de equivalencia definida en un conjunto B a toda relación binaria definida en B que verifique las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Bien entendido que tiene que cumplir necesariamente las tres propiedades para poderse afirmar que la relación binaria es relación de equivalencia. Entonces en el ejemplo de los meses del año hemos establecido una relación de equivalencia.

¿Pero podría poner algunos ejemplos más de relación de equivalencia? Supongamos que en una mercería se recibe un pedido de botones del mismo tamaño y forma, pero de distintos colores, todos juntos en una caja. El dueño de la mercería separa los botones según los colores y los guarda en cajas diferentes con un botón de muestra pegado fuera de la caja. Lo que ha hecho no es sino establecer una relación de equivalencia entre los botones.

¿Podrían decirme qué relación binaria ha establecido para separar los botones? Esa relación binaria es la siguiente. Un botón está relacionado con otro si ambos tienen el mismo color. Exactamente.

Esa es la relación. Sí, pero ¿es realmente de equivalencia? Lo que tendremos que hacer es comprobar si se verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. La propiedad reflexiva es evidente, pues todo botón del conjunto tiene igual color que el mismo.

La propiedad simétrica también se verifica, pues si un botón tiene el mismo color que otro, este último tendrá el mismo color que el primero. Y esto es válido para cualquier par de botones

que cumplan la relación. Y además se verifica la propiedad transitiva, ya que si tenemos tres botones, tales que el primero sea del mismo color que el segundo y el segundo del mismo color que el tercero, se ve que el primero tiene el mismo color que el tercero.

Luego, al cumplir las tres propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, esta relación binaria es de equivalencia. Bueno, me estoy dando cuenta de que lo que hace una relación de equivalencia establecida en un conjunto es agrupar los elementos de ese conjunto según una propiedad común a ellos. En nuestro ejemplo, la relación de equivalencia agrupa los botones según colores.

Me alegro que haya tocado este punto, pues es lo que veremos a continuación. Y es el resultado más importante que establece una relación de equivalencia. Pero me gustaría dar una relación antes de continuar.

Digan un ejemplo de un conjunto y yo intentaré establecer una relación de equivalencia entre los elementos del conjunto. Pues se me ocurre el conjunto de los diputados del Congreso. Bueno, pues una posible relación binaria, y la más natural, entre los elementos de ese conjunto que ha citado, es la de que un diputado está relacionado con otro si ambos pertenecen al mismo partido político.

Ha dicho usted que es una de las posibles relaciones. ¿Nos podría decir otras? Desde luego. Ya he dicho que una relación binaria sobre un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano de A por A . En este caso, el conjunto A es el de los diputados, y cualquier relación binaria será un subconjunto formado por pares de diputados.

No todas las relaciones serán de equivalencia. Otra posible relación será la siguiente. Un diputado está relacionado con otro si tiene el mismo sexo, o también un diputado está relacionado con otro si tienen la misma edad.

No vamos a estudiar estas relaciones. Comprueben ustedes que efectivamente son relaciones de equivalencia. Bien, pienso que ha quedado claro el concepto de relación de equivalencia.

Vamos a volver entonces al ejemplo de los botones, con la relación definida en ese conjunto según la cual un botón está relacionado con otro si ambos tienen el mismo color. Esta relación, como muy bien indicaron ustedes, agrupa los botones según el color. Si tomamos un botón cualquiera mediante esta relación, agrupamos con él todos los del mismo color.

Cada uno de estos grupos es un subconjunto del conjunto dado, es decir, del conjunto de los botones. Además, observamos que un botón sólo puede pertenecer a uno de esos subconjuntos. Claro, un botón verde sólo puede pertenecer al subconjunto formado por los botones verdes.

Bueno, pero, ¿y si hay un botón que es rojo y verde, en qué conjunto estaría? ¿En el de los botones verdes o en el de los rojos? En ninguno de los dos. Habría un subconjunto formado por los botones rojos y verdes a la vez. Quiero hacer notar, además, que los subconjuntos no tienen

que poseer el mismo número de elementos.

Antes dije que un botón sólo puede pertenecer a uno de los subconjuntos. Esto, matemáticamente, se traduce en que la intersección de dos cualesquiera de esos subconjuntos a que dar lugar la relación de equivalencia es el conjunto vacío. Voy a repetir.

Habría un subconjunto formado por los botones rojos y verdes a la vez. Quiero hacerles notar que los subconjuntos no tienen que poseer el mismo número de elementos. Antes dije que un botón sólo puede pertenecer a uno de los subconjuntos.

Esto, matemáticamente, se traduce en que la intersección de dos cualesquiera de esos subconjuntos a que dar lugar la relación de equivalencia es el conjunto vacío. Entonces, en el ejemplo de los partidos políticos pasa lo mismo. Cada diputado sólo pertenece a un partido político.

Y la intersección de cada dos conjuntos a que dar lugar la relación de equivalencia es el conjunto vacío. Y también se cumple, evidentemente, que la unión de todos los subconjuntos es el conjunto de partida. Es decir, al volver a juntar todos los botones que tenemos separados por colores, obtenemos la caja de botones que había recibido el señor de la mercería.

Perfectamente. Vamos a expresar lo dicho anteriormente de una forma matemática. Dado un conjunto A en el que se ha establecido una relación binaria que es de equivalencia en el conjunto de partida, mediante esta relación aparecen unos subconjuntos tales que los elementos que forman cada subconjunto están relacionados entre sí.

Además, estos subconjuntos verifican que la intersección dos a dos de ellos es el conjunto vacío y la reunión de todos ellos el conjunto de partida A . ¿Y no hay alguna forma de denominar estos subconjuntos? Sí. A cada uno de estos subconjuntos se les llama clase de equivalencia. Vamos a ver, entonces, en el ejemplo de los botones, cada clase de equivalencia está formada por los botones que tienen el mismo color.

Una clase de equivalencia será la de los botones de color rosa. Por ejemplo, señorita. Muy bien.

Fíjense que con esto hemos logrado pasar de un conjunto formado por botones a un conjunto cuyos elementos son subconjuntos del anterior, que son las clases de equivalencia a las que podremos nombrar según el color. Al conjunto formado por las clases de equivalencia se le denomina conjunto cociente. Pues entonces, en el ejemplo de los botones, el conjunto cociente son los colores.

Y en el de los diputados, según el partido, el conjunto cociente son los partidos. Como ven, lo que hemos hecho es agrupar los elementos de un conjunto según una propiedad común que verifican sus elementos. Cada subconjunto agrupa los elementos que tienen una propiedad común, ya sea el color en los botones, ya sea el partido en los diputados.

Lo que caracteriza a cada uno de estos subconjuntos es la propiedad que liga los elementos, y

no los elementos entre sí. Al subconjunto de los botones de color verde lo que le caracteriza es precisamente ese color verde, y no cada botón verde. Muy bien.

Por eso, cada subconjunto lo podemos representar por uno cualquiera de sus elementos al que llamaremos representante de esa clase de equivalencia. Entre todos los botones verdes, el representante es un botón verde. O un diputado que pertenezca a un partido, entre los diputados que pertenecen a ese partido.

Eso es lo que hacía el señor de la mercería al pegar un botón de un color por fuera de la caja de los botones de ese color. Bien. Creo que han quedado claros estos conceptos.

La relación de equivalencia, la clasificación en clases de equivalencia que la relación establece en el conjunto de partida, y el concepto de conjunto cociente como aquel cuyos elementos son clases de equivalencia. El próximo día estableceremos una nueva relación binaria. La relación de orden.

Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org