

AC 10 96

Hola, buenas noches. Bienvenidos un día más a este programa que la UNED les ofrece con la intención de ayudar y orientar a los alumnos del curso de acceso directo para mayores de 25 años, el CAT. También queremos acercarnos a todos los interesados en la cultura universitaria.

Durante esta semana les venimos acompañando desde las 10 de la noche, 9 en la Comunidad Canaria, durante 60 minutos. La próxima semana nuestro horario volverá a ser el habitual. En el programa de esta noche, dos asignaturas.

En la primera parte, matemáticas básicas, nos acompaña el profesor Eduardo Ramos, con él hablaremos de las lecciones 6 y 7, conjuntos, aplicaciones y funciones. Pasaremos luego a la segunda parte del programa, que la dedicaremos a introducción a las ciencias políticas. Hablaremos de los problemas de la democracia en América Latina, en la compañía de la profesora Carmen González Enríquez y el profesor titular de la Universidad Complutense, secundino González Marrero.

Y vamos a comenzar ya con matemáticas básicas. Esta noche nuestro programa de matemáticas básicas nos acompaña, como ya es habitual, el profesor Eduardo Ramos. Muy buenas noches.

Buenas noches Isabel y buenas noches a todos nuestros estudiantes. Vamos a ver las lecciones 6 y 7 del libro de texto. Estas lecciones nos hablan de la matemática de los conjuntos, de aplicaciones y de funciones.

Bien, buena parte de los problemas que se plantean no pueden ser resueltos en términos estrictamente numéricos. En el pensamiento matemático se han incorporado muchos conceptos más allá de los números. En este capítulo y en el siguiente se examinan algunos de ellos, los conjuntos, sus operaciones, sus relaciones, sus transformaciones.

¿Qué podemos comentar de todo esto? Como acaba de recordar, lo que hemos estudiado hasta el presente es fundamentalmente los números y los cálculos que se hacen con ellos, la suma, las restas, las ecuaciones, las potenciación. En resumen, lo que podríamos llamar el álgebra. También hemos dedicado una lección al estudio de la geometría, de las figuras, de la representación en el plano de las rectas, de los círculos, etc.

Y comenzamos ahora un bloque de lecciones, que son esta lección, la siguiente, la siguiente, la 68, que podríamos catalogar o englobar dentro de lo que llamaríamos los fundamentos de la matemática. ¿De qué tratamos aquí? De expresar en unos cuantos conceptos, lo más generales posibles, algunas ideas básicas en que se fundamenta buena parte del pensamiento científico. De hecho, algunos de los conceptos que vamos a definir y a considerar con precisión en esta lección ya se han manejado implícitamente en lecciones anteriores, como puede ser la idea de conjunto.

Hemos hablado del conjunto de los números reales, de los números enteros. Hemos hablado también de la inclusión, hemos dicho que los números enteros están dentro de los números fraccionarios, la inclusión de conjuntos. Pero ahora intentaremos precisar estos términos mejor, es decir, dar una formulación abstracta, manipulándolos simplemente en el dominio de las ideas.

Si quieres, independientemente del sustrato real en que se basan, de dónde han salido, aunque lógicamente todo lo que vayamos a decir, toda la teoría que se organice, tiene que tener lógica, estar sólidamente basada o ser coherente con el sustrato real, con los hechos observados. En definitiva, lo que pretendemos hacer en estas lecciones es proporcionar al pensamiento científico algunas reglas que le permitan crear el conocimiento. Debemos entonces empezar hablando de los conjuntos.

¿A qué se denomina conjunto? Nos ponemos como si no supiéramos nada, empezamos desde la nada, empezamos a decir, vamos a definirlo todo. Lógicamente, si ya tropezamos con una dificultad, todo, todo, todo no se puede definir, porque en la primera definición que vemos, algunos términos tendrán que ser incluidos. Y entonces, en la teoría de conjuntos, se admite como conceptos primitivos la idea de conjunto y elemento, y la relación que los liga, que es la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto.

Se puede decir, como se dice en el texto, que un conjunto es una colección bien definida de objetos, no deja de ser una especie de tautología, al fin y al cabo nos podemos preguntar qué es una colección de objetos y diríamos entonces, ¿qué es un conjunto de objetos? Entonces conjunto y elemento, repito, son conceptos primitivos de los cuales se parte la teoría de conjunto para a partir de ellos construir todos los demás conceptos. Y como he ya comentado, la relación clave entre un elemento y un conjunto es si el elemento pertenece o no pertenece al conjunto. Y esta es, digamos, la lógica imperante en el pensamiento científico, por lo menos en la mayor parte del tiempo, digamos una lógica dicotómica, se sabe o no se sabe si el elemento pertenece o no pertenece al conjunto, se puede decidir si está o no está.

En los últimos tiempos, a título de comentario anecdótico, hay una teoría de lógica borrosa o lógica difusa en donde este es ioma de si la pertenencia es o no es, se difumina en cierta manera. Esto es una teoría relativamente moderna que está bastante de moda en algunos campos del pensamiento matemático, pero vamos, por supuesto no entraremos en esta lección ni mucho menos en este curso en eso, pero lo comento a título de curiosidad. ¿Y qué es la inclusión de conjuntos? Bueno, una vez que tenemos claro lo que es un conjunto, un elemento y la pertenencia, podemos considerar otra cosa nueva, que es la relación básica entre dos conjuntos, que es la inclusión.

Un conjunto está incluido en otro si todos los elementos del primer conjunto son elementos del segundo conjunto. Eso ya es una definición, es decir, la inclusión como un elemento A se sabe si está en un conjunto A y también se sabe si está en un conjunto B , si todos los elementos del conjunto A están a su vez en el conjunto B , se dice que A está contenido en B . Es un poco la

extensión de la idea de ordenación que manejamos en los números a la idea de ordenación que hay en los conjuntos, que están ordenados según la relación de inclusión. Hay otros dos conceptos, el conjunto universal y el conjunto vacío.

Bien, estas son necesidades, diríamos, técnicas. Es decir, en la idea de conjuntos está todo el tiempo suponiendo que todos los elementos que se están trabajando y, por lo tanto, todos los conjuntos que se pueden formar con ellos están dentro de un gran conjunto al cual pertenecen todos esos elementos que se llama el conjunto universal y se suele representar, por lo menos así lo hacemos en el texto con la letra U . También se admite, y es una necesidad técnica que permite solidificar algunas partes de la teoría, la existencia de un conjunto que no tiene elementos. Admito que es un concepto realmente que tiene su dificultad de comprender, o sea, una vez más es algo así como el cero, el cero que designaba a la colección de objetos que no tenían ningún objeto.

Pues bien, el vacío designa al conjunto que no tiene ningún elemento. Es un ente de razón, es algo que podemos ver que existe con los ojos de la razón. Nunca veremos en la realidad un conjunto con ningún elemento, no lo podemos concebir ni representar físicamente ese conjunto, pero repito, es una necesidad de la teoría y admitimos su existencia.

Es un concepto quizás un poco difícil, abstracto de conceptos. Bueno, la verdad es que es abstracto, pero rápidamente, a poco que se reflexione y se manipule la teoría de conjuntos, se cae uno en la cuenta de su necesidad y tampoco hay que tener mayor dificultad en un curso de matemáticas con trabajar con cosas que sólo existen para los ojos de la razón. Es decir, no tendremos que caer en ese experimentalismo a ultranza de que sólo existe lo que se puede tocar.

También puede existir lo que se puede concebir. Los conjuntos pueden ser combinados mediante operaciones que se parecen a las de los números. ¿Cuáles son estas operaciones y cómo se realizan? Aquí ya seguimos con la teoría, hablamos de la inclusión, hablamos del conjunto universal, del conjunto vacío y ahora consideramos otro aspecto de la teoría, otro párrafo de la teoría, que son las operaciones entre los conjuntos.

Y las operaciones básicas son tres, son la intersección de conjuntos, la unión de conjuntos y el complementario de un conjunto. La intersección de un conjunto, de conjuntos, de dos conjuntos A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos están a la vez en A y a la vez en B , simultáneamente en los dos conjuntos que se están intersecando. La unión de conjuntos es un nuevo conjunto formado por aquellos elementos que están o bien en A o bien en B o bien en ambos.

Y el complementario de un conjunto A es aquel conjunto cuyos elementos son aquellos del conjunto universal que no están en A . Si nos fijamos, estamos todo el tiempo definiendo conjuntos a base de decir quiénes son, qué elementos los forman, qué elementos pertenecen al conjunto. Una vez más estamos manejando los conceptos básicos, elemento conjunto y la relación de pertenencia. Hay una nueva operación que también incluimos ahí en el texto que es

la diferencia de conjuntos, que es la diferencia entre los conjuntos A menos B es el conjunto formado por todos aquellos elementos que están en A y no están en B . Pero si nos fijamos un poco es lo mismo que calcular la intersección de A con el complementario de B . O sea que de hecho la diferencia no es una nueva operación sino que es el resultado de aplicar dos operaciones.

Las operaciones con conjuntos tienen una serie de propiedades. ¿Cuáles son estas? Sí, ahí es otra de las curiosidades que da la teoría, cómo con pocos conceptos llega uno a hilvanar una serie de ideas que luego pueden manipularse y que forman parte ya de la doctrina, del cuerpo de teoría. Entonces no voy a, son muchas, están ahí en el punto 6.5 del libro, podemos repasar algunas por ejemplo.

La intersección de un conjunto consigo mismo es el propio conjunto. La intersección de cualquier conjunto con el conjunto vacío es el conjunto vacío. La intersección de un conjunto con el conjunto universal es el propio conjunto.

La intersección de A y B es lo mismo que la de B y A , la propiedad conmutativa. Si la intersección de dos conjuntos A y B está contenida en cualquiera de los dos conjuntos, si B está contenida en A , entonces la intersección es el pequeño de contenido. Es una serie de cosas.

Me gustaría llamar la atención sobre, con simplemente la definición de intersección, qué cantidad de cosas sabemos acerca de conjuntos que se intersecan y que se están operando. Algo similar pasa con la unión, algo similar pasa con la complementación y todavía más. Algo similar, se pueden deducir propiedades que relacionan unas operaciones con otras.

Por ejemplo, algo que es también muy lógico y muy intuitivo, la intersección de un conjunto con su complementario, o sea, relacionar la operación y la complementación, perdón, la intersección y la complementación. Pues digo, la intersección de un conjunto con su complementario es el conjunto vacío. Es así, es lógico, no puede haber un elemento que pertenezca a la vez a un conjunto A y a su complementario.

Estas son, repito, que todas estas propiedades y sus demostraciones y la lógica que está por debajo de estas y cómo se manejan incluso en ejemplos, están en el punto 6.5 del libro. Y es conveniente que los estudiantes las conozcan, las practiquen, sean familiares con ellas, porque, en definitiva, esto le da la agilidad del manejo teórico de esta parte del curso. Las representaciones gráficas ayudan a entender los conceptos y a resolver problemas.

Los conjuntos suelen representarse mediante dibujos, denominados diagramas de Venn. ¿Cómo se representan los conjuntos mediante estos diagramas? Como muy bien dice el refrán castellano, una imagen vale más que mil palabras. Y, efectivamente, es un buen recurso utilizar imágenes, utilizar gráficos, para representar esas ideas abstractas, como estamos manejando en este momento, de los conjuntos.

Una idea de representar conjuntos en el plano, con lápiz y papel, debido a Venn, consiste en lo

siguiente. El conjunto universal, es decir, aquel al cual pertenecen todos los elementos que se están considerando, se suele representar como un cuadrado o un paralelogramo, algo en trazos rectos más o menos grande. Y dentro de ese paralelogramo, los conjuntos, que forman parte de la teoría que estamos considerando, se representan mediante curvas cerradas.

Los elementos que caen dentro de esa curva, pertenecen al conjunto, y los elementos que quedan fuera de esa curva, no pertenecen al conjunto. Con esta representación, se pueden visualizar fácilmente si un conjunto está contenido en otro, si dos conjuntos son disjuntos o no, se puede visualizar fácilmente la intersección de dos conjuntos, se puede visualizar la unión, la diferencia de dos conjuntos, el complementario, etc. Y esto, tanto para dos, tres o incluso más conjuntos.

Entonces, es una idea bastante útil y bastante intuitiva. Es decir, no vale para las demostraciones. Puede uno inspirarse en ella para hacer demostraciones, pero la demostración de algunas propiedades de los conjuntos, siempre se demuestra recurriendo a la idea primitiva.

Es decir, un conjunto, para ver si hay que definir o averiguar o caracterizar los elementos que pertenecen al conjunto y los que no pertenecen. Eso es lo que identifica claramente el conjunto. Pero ahora muy bien podemos averiguar, mediante el diagrama, por dónde escribir las demostraciones.

¿Y en cuanto a lo que es el cardinal de un conjunto? Bueno, el cardinal de un conjunto no es algo tan simple como el número de elementos que lo forman. Ni más ni menos que eso. Se cuentan los elementos que forman el conjunto y ese número que resulta es lo que llamamos el cardinal del conjunto.

Hay una serie de ejercicios y de cuestiones y de problemas y de datos que tienen que ver con el cálculo de cardinales. Es decir, con los típicos problemas de averiguar cuántos elementos reúnen tal o cual propiedad forman parte de la unión, de la intersección de conjuntos. Aquí probablemente la única fórmula que hay que aprender, que está muy razonada en el libro porque es así, y a partir de la cual se resuelven prácticamente todos los problemas y todos los ejercicios que pueden plantearse sobre este tema, es la fórmula del cardinal de la unión de dos conjuntos.

¿Qué nos dice eso? El cardinal de la unión de dos conjuntos es igual a la suma del cardinal de A y del cardinal de B y menos el cardinal de la intersección. Esto es así porque intuitivamente es fácil verlo porque al sumar el cardinal de A y el cardinal de B contamos dos veces los elementos que están en A y B al mismo tiempo. Es decir, una vez cuando los contamos en A y otra vez cuando los contamos en B. Bueno, pues para ver justamente el cardinal de la unión, que en la unión sólo están una vez los elementos que están en la intersección, los comunes de A y B, pues hay que restarlos para que nos haga la cuenta justa.

Bueno, pues con esta fórmula y un poco de sentido común y aplicando pequeños

razonamientos basados incluso en diagramas de Ben, todos los ejercicios que suelen ponerse sobre este tema se resuelven con facilidad. Y pasamos al capítulo 7 que nos habla de aplicaciones y funciones. Cualquier disciplina científica estudia las transformaciones.

El concepto matemático de transformación o cambio se denomina aplicación o función. Quizá haya ejemplos que nos puedan aclarar este concepto de transformación. ¿Cuáles pueden ser? Muy bien, efectivamente iniciamos ahora la idea de la aplicación y de la función.

Esta idea, yo he dicho de otra manera, que la idea de transformación o cambio aparece constantemente en cualquier cambio científico. Seguro que alguno recuerda que un filósofo griego basó su pensamiento en la expresión todo cambia, todo fluye. Por ejemplo, la biología estudia el paso de un ser desde la fase de embrión a adulto, la transformación de embrión a adulto.

La economía estudia la influencia de la modificación de los tipos de interés en los hábitos de consumo de los ciudadanos. Cómo una modificación de una circunstancia cambia, transforma hábitos de consumo de los adultos. Matemáticas también está interesada por lo que llamaríamos los aspectos de la formalización del cambio.

Es decir, está interesada en cómo reducir el fenómeno del cambio, el fenómeno de las transformaciones, de la transformación de un conjunto en otro a una serie de definiciones y conceptos. Esta es la idea que está debajo de esta lección. Debajo de esta lección, las matemáticas del cambio, por decirlo así, las matemáticas que nos dicen cómo unos conjuntos se transforman en otro, son las matemáticas que hacen referencia a los conceptos de aplicaciones o, en un caso concreto, funciones.

Veamos un ejemplo que está escrito en el libro y vamos a recordar. Supongamos que tenemos un conjunto A formado por dos elementos, película virgen, un trozo de película virgen y una esponja húmeda. ¿Qué pasará si exponemos a los elementos de ese conjunto al Sol? Pues pasará algo que la física nos enseña, que la película virgen se convierte en película velada y que la esponja húmeda se convierte en esponja seca.

Entonces hemos cambiado el conjunto A, película virgen, esponja húmeda, en conjunto B, película velada, esponja seca. Hemos hecho una transformación. ¿Lo sabemos todos sobre esa transformación? No, nos falta un dato, nos falta saber qué elemento del primer conjunto se transforma en qué elemento del segundo conjunto.

Hasta ahora fíjate que solo he dicho que el conjunto A se transformaba en el conjunto B. Pero sí, ya sabemos que el elemento película virgen se transforma en el elemento película velada y el elemento esponja húmeda se transforma en el elemento esponja seca. Entonces, en síntesis, la matemática de la transformación de un conjunto en otro conjunto exige conocer no sólo cada uno de los conjuntos, el primero y el segundo, el conjunto inicial y el conjunto transformado, sino también qué elemento del conjunto inicial se convierte en qué elemento del conjunto transformado. Bien, creo que ha quedado claro lo que es una transformación y ya hemos dicho

que la aplicación es una clase de transformación.

¿Pero podemos aclarar y ampliar quizá más el concepto de aplicación? Muy bien, con mucho gusto. Vamos a ver. Para dar una aplicación, entonces, necesitamos un conjunto original, un conjunto inicial, un dominio, como se llama a veces en el lenguaje de las matemáticas.

Necesitamos un conjunto final, un conjunto imagen, como se llama en las matemáticas, y una regla que nos diga qué elemento del conjunto origen se transforma en qué elemento del conjunto imagen. Esta regla se puede dar de varias maneras. Por ejemplo, podemos hacer un gráfico con unas flechitas en donde decimos este elemento va a este, este elemento va a este.

Podemos dar una fórmula que nos diga el elemento A se transforma en el elemento F de A, etc. Podemos hacer una enumeración explícita de cada caso. Los elementos del primer conjunto A, B, C, D, se transforman respectivamente en los elementos del segundo conjunto Z, X, etc.

Lo único que hay que tener presente, o quizás las características que define una aplicación y lo que dice lo que es una aplicación de lo que no es, lo que distingue una aplicación de lo que no es, es lo siguiente. Es necesario que todos los elementos del primer conjunto tengan una imagen y una sola en el segundo conjunto. Esa es la característica.

Es decir, si nos dan un ejemplo en el cual hay algún elemento del primer conjunto que no tiene imagen, eso no es una aplicación. Si nos dan un ejemplo en el cual algún elemento del primer conjunto tiene dos imágenes, eso no es una aplicación. Eso no arriesga lo mismo para el segundo conjunto.

Puede haber en el segundo conjunto elementos que no sean imagen de ninguno. Eso no estorba para que algo sea una aplicación o no. Bien, hemos hablado de imagen.

¿Pero a qué se llama imagen e imagen inversa de un subconjunto? Bueno, ya que tenemos un conjunto origen, podemos considerar dentro de ese conjunto subconjuntos. Entonces, los elementos que pertenecen a ese subconjunto tendrán una imagen en el segundo. Bueno, pues entonces el conjunto formado por las imágenes de esos elementos del primer subconjunto que estamos hablando se llama el subconjunto imagen del primer conjunto.

Supongamos que el conjunto origen primero se llama A y la aplicación va de A en un conjunto segundo que se llama B. Supongamos que tenemos dentro de A un subconjunto que digamos C. Está formado por unos cuantos elementos de A. Esos elementos, como son de A, tendrán sus imágenes en un subconjunto del conjunto B. Ese subconjunto de B formado por las imágenes de los elementos del conjunto C se llama subconjunto imagen. Ahora, ¿qué es el otro concepto que habíamos hablado? Imagen inversa. La situación paralela pero en el otro lado.

Supongamos que dentro del conjunto B, que es el destino, tenemos un subconjunto D. A ese subconjunto vendrán algunas flechitas del primer conjunto de A. Por los elementos de donde salgan esas flechitas forman en el conjunto A un subconjunto que llamaremos F-1DD, la imagen inversa del subconjunto D. Son dos conceptos muy interesantes y muy útiles. Hay

distintos tipos de aplicación, pero ¿cuáles son estos tipos de aplicación? Bueno, por esa afán que tenemos los humanos de darle nombre a todos, por lo que hay dentro de esta generalidad de la aplicación, digamos, aplicaciones distinguidas. Algunas que cumplen algunas cualidades.

Entonces, primera cosa que no tenía por qué verificar una aplicación en general. Es decir, todos los elementos del primer conjunto tienen que tener una imagen en el segundo. Pero puede haber dos elementos del primer conjunto que vayan al mismo sitio del segundo.

Eso no entorpece para que algo sea aplicación. Una aplicación un poco más distinguida es cuando todos los elementos del primer conjunto van a elementos diferentes del segundo conjunto. Si eso ocurre, la aplicación se dice que es inyectiva.

Le damos un nombre adicional. Segunda cosa. Hemos dicho que todos los elementos del segundo conjunto no tenían que recibir una flechita, no tenían que ser imagen de alguno del primer conjunto.

Es decir, podía haber en el segundo conjunto elementos que no fuesen imagen de ninguno. Bueno, pero puede haber aplicaciones en las cuales todos los elementos del segundo conjunto reciben una flechita. Todos los elementos del segundo conjunto son imagen de alguno del primer conjunto.

Cuando ocurre eso, se dice que la aplicación es sobreyectiva. Y cuando ocurren las dos cosas, cuando una aplicación es inyectiva y sobreyectiva a la vez, se dice que es biyectiva. Y se distingue muy bien porque es una aplicación que va uno a uno.

Hay tantos elementos en el primer conjunto como elementos en el segundo conjunto. Lo cual es muy fácil de razonar porque todos los elementos del conjunto segundo deben ser imágenes de alguno. Y como todos los del primero tienen que ir a sitios distintos, pues tiene que haber uno para cada uno.

Son aplicaciones biyectivas que, de alguna manera, identifican a los dos conjuntos porque tantos elementos hay en el primero como hay en el segundo. ¿Qué es la composición de aplicación? Igual que cuando hacíamos números, sabíamos hacer operaciones con ellos, con las aplicaciones también se pueden hacer operaciones. Y la operación que se hace con las aplicaciones es componerlas.

Pensemos cómo está la situación. Tenemos un primer conjunto A, un segundo conjunto B y un tercer conjunto C. Supongamos que de A a B tenemos una aplicación F y de B a C una aplicación G. Entonces nada nos impide considerar un resultado, una aplicación que vaya desde A hasta C directamente pasando por B. De forma que a un elemento X que empieza en A pase a ser un elemento de B que llamaríamos F de X y a su vez a través de la aplicación G llegue a ser un elemento G de F de X. Bueno, pues el resultado de aplicar directamente desde A hasta C la aplicación compuesta es X. Entre A y C hay una aplicación que denotamos G o F. Y por eso se escriben así, en este sentido. Y se dice que es la composición de F con G. Pero se escribe G o F

porque es como nos pide la lógica de escribirla.

Pongamos un ejemplo que es muy fácil. Supongamos que tenemos dos aplicaciones. Una que consiste en que un número X se multiplica por 2 y otra que a un número dado se le suma 1. Entonces la aplicación que a X la primera le pasa a valer $2X$ y la segunda le pasa a un número tal como el $2X$ le suma 1. Pues entonces la segunda le pasa a $2X$ más 1. Y entonces tenemos una aplicación que va desde el primer conjunto hasta el último que a un X le pasa a valer $2X$ más 1. Y es interesante observar que no da lo mismo hacerlos en un sentido que en otro.

Pensemos este caso. Pensemos que hacemos primero la aplicación que consiste en sumar 1 y luego en multiplicar por 2. Entonces al primer elemento cogemos X y le sumamos 1 y se convierte en X más 1. Si luego ese elemento lo multiplicamos por 2 resulta que es 2 por X más 1 que es $2X$ más 2 no como antes que era $2X$ más 1. O sea que ojo que no da lo mismo hacer $G \circ F$ que hacer $F \circ G$. Es decir que dicho en términos matemáticos la composición de aplicaciones no goza de la propiedad conmutativa. Para acabar este capítulo ¿a qué se denomina función y cómo se puede representar? Una vez más es una especialización del lenguaje.

Una función no es más que una aplicación entre conjuntos de números. Si tenemos el conjunto N el conjunto de los números enteros Z el conjunto de los números racionales Q y una aplicación definida entre ellos o entre por ejemplo de Q a Q una aplicación en ese caso se le suele llamar función. Una función se puede representar en un plano XY en un plano cartesiano mediante a cada punto X tenemos una imagen.

Entonces tenemos el par de valores como son números tanto X como su imagen F de X el par de valores son X y F de X forman un par de números y ya sabemos de la lección de geometría que eso representa un punto en el plano. Bueno, pues entonces una función se puede representar en el plano mediante la gráfica de los puntos X , F de X en unos casos será una recta en otros casos será una curva, etc. Pero puede darse en el plano una representación de una función F mediante una gráfica recta curva en el plano.

Es un aspecto también muy interesante el estudio de las funciones. Pues hemos visto esta noche las lecciones 6 y 7 del libro de texto. En el próximo programa veremos la 8 y la 9. Son muy interesantes también estas lecciones y tienen mucha importancia.

Bueno, si me permiten lo vamos a dejar yo creo que con la parte de estudio que tienen los alumnos para este periodo lectivo, estas lecciones 6 y 7 vamos a dejar que las reposen, vamos a dejar que trabajen los cuadernillos de evaluación y que las maduren para entrar con bríos a la próxima lección que hablará de la lógica de proposiciones y a la siguiente que hablará de la combinatoria en un próximo programa. Pues muchas gracias y muy buenas noches. Muchas gracias.