

AC 15 35

Esta noche, segundo programa que emitimos de Acceso UNED tras las vacaciones de Navidad. A todos, bienvenidos de nuevo a este programa para los mayores de 25 años que aspiran a ingresar en la Universidad Nacional de Educación a Distancia. Esta noche, dentro de Matemáticas Especiales, comentaremos algunos problemas específicos que plantea el estudio de los temas de la segunda unidad didáctica.

A todos, feliz año nuevo. De lunes a viernes, de once a once y media de la noche aproximadamente, una hora menos en Canarias, por Radio Nacional de España, Radio 3 en frecuencia modulada y otras emisoras de Radio Cadena Española. Esta noche, con la profesora Teresa Ulecia, vamos a abordar la consideración de la segunda unidad didáctica de Matemáticas Especiales.

Primero, vamos a ver, Teresa, cuáles son los temas que están en esta segunda unidad didáctica. En esta segunda unidad tenemos cuatro temas. El primer tema es relativo a las estructuras.

El segundo tema, las sucesiones de números racionales. Y el tercer y cuarto tema, los números reales y complejos. Bueno, pues vamos a ver los problemas que puede presentar el estudio de ese primer tema de estructuras numéricas.

Vamos a ver. En el primer tema, estudiamos las propiedades de una serie de conjuntos que, aunque son distintos, en cambio, tienen una estructura común respecto a una serie de operaciones. La primera estructura es la del grupo.

Esta estructura es, en un conjunto, se define una ley de composición que cumple las propiedades asociativa, elemento neutro y simétrico. Si además cumple la propiedad conmutativa, tenemos la estructura de grupo conmutativo o abeliano. O sea, que entonces es importante recordar que grupo a secas es la asociativa neutro y simétrico.

Y si además se cumple con la conmutativa, a ese grupo se le llama abeliano. En esta estructura deben ver los ejemplos del libro y, a ser posible, algunos ejemplos que puedan buscar parecidos. Aparece el ejemplo del grupo del z sobre m , que ya en el tema anterior, en la unidad 1, ya se definió.

Aquí aparecen con las operaciones de suma y producto. Tienen una serie de cuadros en el cual pueden ver las propiedades y estudiar las propiedades de estas operaciones. Además, tienen después otras propiedades que se deducen de la propia definición de estructura, como son la propiedad con la cancelativa, la solución única para ecuaciones de primer grado, etc.

Después, pasamos a la estructura de anillo. La estructura de anillo ya es, en un conjunto, en el que definimos dos operaciones. Respecto a la primera, tiene que ser un grupo conmutativo.

Respecto a la segunda operación, tiene que cumplir la propiedad asociativa y, además, la propiedad distributiva respecto de la suma. Cuando cumple también, respecto a la segunda operación, la propiedad conmutativa, el anillo se llama conmutativo. Si, además, tiene también, respecto a esa segunda operación, elemento neutro, se llama anillo unitario o con elemento unidad.

O sea que, entonces, en el anillo tenemos un grupo abeliano o conmutativo, tal y como lo habíamos definido antes, y después, en la segunda operación, se da el cumplimiento de la propiedad asociativa y, además, distributiva respecto de la suma. ¿No es eso, básicamente? Así es. Y luego, hemos dicho que si se da la propiedad unitaria... Se llama anillo unitario.

Se llama anillo unitario. Muy bien. Bueno, pues esta sería la estructura de anillo.

Después tenemos la estructura, el dominio de integridad. Es un anillo conmutativo que no tiene divisores de cero. Por ejemplo, en el anillo $\mathbb{Z}$ sobre 6, los elementos 2 y 3 son distintos de cero, pero su producto es cero.

Esos números se llaman divisores de cero. Por tanto, ese anillo no es un dominio de integridad. Es un ejemplo, además, que viene en el libro.

O sea, que se puede seguir en el libro cuando no es un dominio de integridad. Y la última estructura es la de cuerpo. También es un conjunto en el que se definen dos operaciones.

Pero en este caso, la segunda operación cumple las propiedades asociativa, conmutativa y elemento neutro. Y, por supuesto, la distributiva de la segunda operación respecto a la primera. Por tanto, la estructura de cuerpo es más compleja que la de anillo.

O sea, vamos viendo que va aumentando el grado de complejidad porque cada una de estas estructuras se va basando en cosas que ya se conocían de la estructura anterior. Entonces, en la de cuerpo se definen dos operaciones. En la segunda se verifican las propiedades asociativa, conmutativa y elemento neutro.

Y, asimismo, es distributiva la segunda operación respecto de la primera. En cuanto a las actividades prácticas de este tema, lo que deben hacer ejercicios en los cuales les definen un conjunto y unas operaciones. Y deben ver sus propiedades para ver qué estructura tiene.

Es decir, que la utilidad práctica de todas estas estructuras es verla en problemas. Quedarse, por supuesto, con las propiedades teóricas de cada una de estas estructuras, para saber por qué se caracterizan. Pero después, ya en los ejercicios que se proponen, en cuadernillos o incluso como ejemplos en el libro, e incluso también seguramente caerá algo de esto en el examen final, lo que hay que ir viendo es propiedad a propiedad si se cumplen esas propiedades.

Y según las propiedades que se cumplan y las operaciones que nos hayan dado, ya se podrá decir, ante ese problema concreto, qué estructura es. Bueno, pues estos son aspectos

fundamentalísimos que no se pueden olvidar del tema primero de la segunda unidad didáctica. Y no se pueden olvidar porque es que, además, los alumnos tienen problemas de este tipo en el segundo cuadernillo de evaluación a distancia que están entregando en estos días.

Este tema es importante porque luego después, en la unidad tres, vamos a ver otra nueva estructura de espacio vectorial. Y para ello tienen que conocer bien estas estructuras. En el espacio vectorial ya son estructuras en las cuales aparecen operaciones internas que son estas y otra externa.

Ya lo veremos entonces. Sí, o sea que vamos a seguir con la misma lógica que hasta ahora. Va a ser ir complicando el asunto cada vez añadiendo nuevas propiedades y operaciones.

Entonces ya, en este tema dos, sucesiones de números racionales de la segunda unidad, ¿qué podíamos comentar? Bueno, en este tema el objetivo es definir las sucesiones convergentes en los racionales, en $\mathbb{Q}$. Es para luego, en el tema siguiente, definir el conjunto de los números reales, que de hecho se definen como unas clases de equivalencia de sucesiones convergentes, sucesiones de Kochi, que en el caso de $\mathbb{R}$ son convergentes. O sea que un poco la finalidad de este tema es poder luego demostrar lo que aparece en la lección siguiente. Es ampliar el conjunto de números racionales al conjunto de los números reales.

En este tema segundo, primero estudiamos las sucesiones, la definición general de sucesiones, y luego pasamos a unos tipos de sucesiones, que son las sucesiones convergentes, sucesiones que tienen límite, y después sucesiones de Kochi. Es importante que distingan entre este tipo de sucesiones, porque toda sucesión convergente es una sucesión de Kochi en el conjunto de los racionales, pero no al revés. O sea, no toda sucesión de Kochi es convergente.

Las convergentes son las que tienen límite. De hecho tienen un ejemplo en el 2.4, en el último apartado de este tema, en el cual hay un ejemplo de una sucesión que es de Kochi pero no convergente. Tienen que ver las propiedades de las sucesiones convergentes, sobre todo las dos primeras proposiciones, aquella que dice que una sucesión, si tiene límite, es único.

Y la otra propiedad, la siguiente proposición, que dice que toda sucesión convergente es acotada. De esta manera, ver la importancia, la propiedad del límite, que es una condición muy fuerte. O sea, que si se da una sucesión, ¿no? Entonces, para ver si es convergente, hay que ir a ver esas dos propiedades que acabas de decir.

No, para ver si es convergente, habría que ir a la definición, o sea, estudiar el límite y comprobarlo con la definición. Definición que tienen al principio del tema y que, en realidad, vale como demostración, porque nosotros podemos hallar el límite, pero para comprobar que efectivamente una sucesión tiene límite, hay que ir a la definición, definición que tiene en la página 135. Tienen un ejemplo en la página 136 de la sucesión $1/n$ partido por n , que es una sucesión convergente cuyo límite es cero, y en esa página demuestran cómo, cogiendo la definición aplicada para esa sucesión y ese límite, efectivamente la cumple.

Bueno, entonces lo que decías de ver si tiene límite único y si está acotada. Esto es ver que la condición de convergencia es muy grande, entonces dentro de las sucesiones las convergentes son, a su vez, acotadas. Es una condición más fuerte que la de la cota.

Bien, bueno, y esas serían las sucesiones convergentes, ¿no? Sí, la parte práctica de este tema es saber hallar el límite de sucesiones. Los secretos de autocomprobación tienen dos límites del mismo tipo, en las cuales al hallar el límite aparece una indeterminada del tipo infinito partido por infinito, y ven el método que hay para resolver estas indeterminadas. Hay otros tipos de indeterminadas, entonces es interesante que consulten en la bibliografía que se les ha recomendado para hacer otros límites.

Siempre a la hora de trabajar necesitamos más apoyo que un libro, tienen que acostumbrarse a consultar otros libros. El caso concreto de las sucesiones pueden consultar cualquier libro de segundo debut, de cualquier editorial, cualquier libro de texto, y ahí vienen más ejemplos a partir de la idea del límite de sucesiones. O sea, de técnicas para poder resolver problemas de indeterminación, ¿no? De indeterminadas.

Que aquí únicamente aparece, dices, el tipo infinito partido por infinito. Sí, en los orígenes de autocomprobación aparece el número cinco y el número seis, son dos límites, y son del tipo infinito partido infinito. Ahora, hay otros tipos, como puede ser uno elevado a infinito, como puede ser infinito menos infinito, y otra serie que, claro, en el libro no han puesto todos, entonces conviene consultar otra bibliografía.

Y eso sería con respecto a las sucesiones convergentes, ¿no? A las sucesiones convergentes. Y luego también decíamos sucesiones de Cauchy en esta lección. Sí, en las sucesiones de Cauchy, en realidad, la definición que hacen está pensado como objetivo para luego definir en el siguiente tema los números reales.

Entonces, como ejercicio práctico, más bien, de sucesiones de Cauchy sería sólo, si les dan una sucesión, pues saber clasificarla, a ver si es convergente o de Cauchy o acotada. Aunque en realidad son más importantes las convergentes. Por eso, en la práctica conviene que hagan más ejercicios de sucesiones convergentes, de buscar el límite y de mostrarlo con esa definición que decíamos antes.

Bueno, pues dado que tener claros estos conceptos es tan importante para la realización de ejercicios, podríamos insistir en la definición del límite, que quizá pueda presentar algún problema de comprensión, que aparece en el libro al principio de la página 136. En esta definición aparece una letra griega llamada épsilon, que en matemáticas la utilizamos muy a menudo para designar distancias pequeñas. Por eso aparece épsilon mayor que cero.

Es un número positivo y pequeño. Uno partido por cien, uno partido por mil... O sea que, en realidad, épsilon, esa letra que es como una especie de muy rara, pero que es una letra griega que significa épsilon, es algo que se utiliza mucho en matemáticas para indicar distancias muy pequeñas. Es positivo, porque por eso se pone que es mayor que cero.

Es siempre un valor positivo, pero siempre algo infinitesimal. En la idea de convergencia, la sucesión a_n tiende al límite a ... O, por tanto, cuando aparece ahí a_n menos a , esa a_n que representa es el límite, es decir, ¿hacia dónde van los términos de la sucesión? Para que converja significa que la distancia de esos términos a_n al límite a es cada vez más pequeña. La distancia viene representada, se calcula como el valor absoluto de la diferencia.

Por eso en la definición aparece una barra, valor absoluto, $|a_n - a|$, se cierra la barra, menor que ϵ . O sea que es que incluso ese valor absoluto de a_n menos a tiene que ser menor que ϵ , y ya dijimos que ϵ era, además, súper pequeño. Por tanto, es todavía más pequeño que ese ϵ , la condición que se está poniendo ahí.

Y esta condición de que a_n diste de a menos que ϵ tiene que cumplirse no sólo para un término n , sino para todos los términos a partir de uno que en la definición lo notan con n_0 . Muy bien, o sea que en realidad parece muy complicado, pero el concepto del límite es bien simple. Tenemos los términos de una sucesión, que son una serie de números, y que cada vez, entre esos números, la distancia va siendo más pequeña, y cada vez más pequeña, y más pequeña que el ϵ , que ya es algo muy pequeño.

Es decir, más pequeña, pero no sólo más pequeña, sino todo lo pequeña que se quiera. Que se coge el ϵ , por muy pequeño que sea, se encuentra un término de la sucesión, que se representa con n_0 , que cumple que todos los términos siguientes distan del límite a menos que ese ϵ , por pequeño que sea el ϵ . Y eso es cuando la sucesión tiene límite, que es precisamente esa a . Bueno, pues entonces dejando ya este tema, podemos pasar al siguiente, y entonces el siguiente tema trata de los números reales.

¿Por qué aparecen los números reales? Bueno, consiste en ir ampliando los conjuntos numéricos, y la ampliación se debe a alguna deficiencia del conjunto. En este caso, los números racionales, hay una operación que es, por ejemplo, las raíces de índice par, raíz cuadrada, por ejemplo, de algunos números racionales no tiene solución dentro de los racionales. Por ejemplo, raíz cuadrada de dos no es un número racional.

Entonces necesitamos ampliar este conjunto $\mathbb{Q}$. La manera de hacerlo es con el conjunto de los números reales, que va a incluir a los racionales y un nuevo conjunto que son los irracionales. O sea que entonces los números reales van a resolver lo que no se puede resolver en los racionales. En la primera pregunta del tema, definen primero los números reales.

Se define una relación R en el conjunto de las sucesiones de números racionales, de tal manera que se dice que una sucesión a_n está relacionada con b_n , cuando la diferencia es una sucesión nula. Esta relación así definida, que lo hacemos en la página 155, cumple las propiedades de relación de equivalencia, la reflexiva, la simétrica y transitiva. De esta manera podemos hacer una partición en el conjunto de las sucesiones y formar clases de equivalencia.

Hay esas clases de equivalencia que están formadas por una sucesión de números racionales D , y todos sus equivalentes en esta relación se llama número real. El número real se

representa, se coge una sucesión de la clase y se representa entre barras. Se definen después las operaciones suma y producto.

Con la suma tiene las propiedades de grupo conmutativo que hablábamos antes, la asociativa, el elemento neutro, el elemento opuesto y el elemento simétrico. Después se define también el producto, y se ve que los números reales tienen las propiedades también, quitando el cero, también de grupo conmutativo. Lo cual querría decir, juntando ambas propiedades que las cumple, que en realidad los números reales son... Son una estructura de cuerpo, porque cumple además la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

No hay que olvidar esa propiedad que se exige en la estructura de cuerpo que une las dos operaciones, la suma y el producto en este caso. En este caso, muy bien. Entonces los números reales tienen estructura de cuerpo.

Y eso además es lo que se demuestra a continuación, viendo estas dos operaciones, la suma y el producto, y ver que tiene esta estructura. Luego hay una pregunta en el libro que hace referencia al isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Vamos a ver. Bueno, en realidad el isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no existe, porque de hecho $\mathbb{R}$ es un conjunto que contiene a $\mathbb{Q}$. Al ampliar los conjuntos interesa que, al ser una ampliación, que contengan al conjunto anterior.

Esto se hace de esta manera. Se define un isomorfismo entre los números racionales $\mathbb{Q}$ y un subconjunto de los reales, que en el libro representa con el subcero. Entonces si conseguimos un isomorfismo que tiene que cumplir tres condiciones, dos conjuntos isomorfos son equivalentes.

Son como iguales. Matemáticamente hablando son iguales. De esta manera, hemos definido un isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ subcero, que es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, identificamos los racionales con $\mathbb{R}$ subcero.

Y de esa manera los racionales están contenidos en $\mathbb{R}$. Claro, o sea que en realidad es la forma de decir, más formalizadamente, lo que decías al principio. Que $\mathbb{Q}$ en realidad coincide con los racionales dentro de los reales. Y no con los irracionales.

Por eso es un subconjunto de $\mathbb{R}$, que sería el subconjunto de los racionales. Al final de este tema, en el último teorema, se demuestra cómo ya en este conjunto de números reales, todo número real no negativo, tiene una raíz cuadrada única y no negativa. Entonces, soluciona el problema que hablábamos al principio.

Y esto puede aparecer en ejercicios, verificar si vamos a hacer problemas con respecto a los números reales. Sí, puede ser incluso, por ejemplo, eso, demostrar que raíz de 2 no es un número racional, que es la definición. Normalmente este tipo de demostraciones se hace por reducción al absurdo.

Se supone que sí es y se llega a una contradicción. Y entonces ya nos quedaría por comentar el último tema de esta segunda unidad didáctica, que también se sigue con el mismo principio.

Cosas que no se resuelven ahora en el caso de los números reales, que son los que nos van a permitir llegar a la lógica de deducir el concepto de los números complejos, que son los que vienen después en el tema cuarto.

En el caso de los números complejos, necesitamos ampliar $\mathbb{R}$ y poner $\mathbb{C}$. Y pasar a los complejos, porque hay algunas raíces que no tienen solución. Son las raíces cuando el radicando es negativo. Raíces de índice par que el radicando es negativo.

Entonces se vuelve a definir otro nuevo conjunto que incluye a los reales. La definición se hace como pares de números reales. Bueno, por ejemplo, sería así como un ejemplo, ¿no? El problema que se presentaría al calcular la raíz cuadrada de menos dos.

Por ejemplo, raíz cuadrada de menos dos no existe dentro del conjunto de los reales, porque sería buscar un número que elevado al cuadrado de menos dos. Ningún número real elevado al cuadrado era negativo. Entonces, en los números complejos, sí.

Se definen como pares de números reales. La primera parte A se llama parte real, la segunda parte imaginaria. Y dentro de estos se define una suma que tiene unas propiedades y se define un producto que tiene otras propiedades.

Con ambas operaciones tiene también estructura de cuerpo. Hay que tener en cuenta que cuando ampliamos el conjunto lo menos que podemos pedir es que tenga la misma estructura que tenía la anterior, en este caso $\mathbb{R}$. Entonces los complejos también es un cuerpo. Y también con respecto a las dos operaciones, suma y producto.

Igual que pasaba con los racionales y $\mathbb{R}$, hay un isomorfismo de tal manera que los números reales están contenidos en $\mathbb{C}$. Los números reales se pueden definir como los complejos cuya parte imaginaria es cero. De tal manera, el número real 3 sería el complejo $3-0$. ¿Normalmente se suele utilizar para representar la parte imaginaria con una *ilatina*? Sí.

La *ilatina* es el número complejo $0-1$. Es la unidad imaginaria que 0 es parte real y 1 es la unidad imaginaria. Según la operación que se ha hecho de producto, se cumple que i^2 a la unidad imaginaria multiplicada por ella misma es igual a menos 1. De esta manera, ya las raíces cuadradas negativas tienen solución.

Por ejemplo, la raíz cuadrada de menos 2 sería el número complejo, por ejemplo, raíz de $2i$. Porque al elevar al cuadrado, raíz de 2 al cuadrado, 2. Y al cuadrado, menos 1. Nos quedaría menos 2. ¿De esto puede haber algún problema interesante? En realidad, no es tan complicado lo de los números complejos, pese a su nombre. Los números complejos es más sencillo.

Las operaciones que aparecen, la suma, el producto, y luego también el cociente, y saber representarlos allá del módulo, en realidad, a este nivel, solo hacen esto. Ya en el próximo programa, lo que vamos a hacer es comentar, dentro de la unidad didáctica 3, la última estructura importante que se estudia, que es la de espacios vectoriales, para lo cual es absolutamente imprescindible repasarse todas las anteriores, porque en los espacios

vectoriales se necesita conocer todas las estructuras anteriores. En estos días, los alumnos entregan el segundo cuadernillo y pronto se lo devolverán corregido.

De modo que toda esta teoría, si lo han estudiado, y sobre todo si han hecho los ejercicios del segundo cuadernillo, la podrán comprobar en la práctica, si la han entendido o no, de acuerdo con esos ejercicios. No deben de asustarse a veces por el nivel que parece que tienen las definiciones, teniendo en cuenta que lo importante en el examen final será sobre todo la parte práctica. Las demostraciones tienen que ir, más que nada, entendiéndolas, no memorizar.

Es más importante la parte práctica. Y en ese sentido, aunque los conceptos parezcan un poco difíciles de definir, se pueden entender mínimamente y se acaban de comprender, sobre todo cuando se hacen muchísimos problemas. Bueno, pues muchas gracias Teresa Eulessia por haber estado hoy con nosotros, que hoy ha sido además el segundo programa del curso después de las vacaciones.

Cogemos todos con mucha fuerza el segundo trimestre, con muchas ganas de estudiar y de resolver los problemas que se hayan podido tener. Y te despedimos hasta el próximo programa, en que, como hemos dicho, nos ocuparemos de la tercera unidad didáctica. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org Finalizado el tiempo del curso de acceso, la UNED se despide ya hasta el lunes próximo.

Buenas noches y que paséis un buen fin de semana.