

AC 15 57

Hola, buenas noches y bienvenidos a este tiempo de radio que la UNED propone a los alumnos del curso de acceso directo. Recordamos que las emisiones de la UNED se envían a los centros asociados en casete para que los alumnos puedan consultarlas. En la mayoría de los centros existe servicio de préstamo y el alumno puede escuchar el programa con toda tranquilidad.

Hoy en Matemáticas Especiales nos acompañan los profesores Pedro Jiménez y Antonio Costa. Con ellos veremos los temas 7, que nos habla de sistemas de ecuaciones lineales, 8, matrices y determinantes, 9, resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices, el 10, elementos de geometría, el 11, trigonometría y el 12, introducción a la geometría analítica. Esta noche en Matemáticas Especiales vamos a ver los temas que van del 7 al 12.

Nos acompañan los profesores Pedro Jiménez Guerra y Antonio Costa, muy buenas noches a los dos. Buenas noches. Vamos a comenzar hablando del tema 7, el tema 7 nos habla del sistema de ecuaciones lineales.

¿Podríamos poner algún ejemplo para que se entendieran mejor? Hombre, pues sí, yo creo que a todos se nos ha planteado alguna vez problemas como el siguiente, ¿no? Pues yo tengo 100 pesetas, por ejemplo, y quiero comprar peras y manzanas. Las peras valen un precio PSU1 y las manzanas valen PSU2, ¿no? ¿Cuánto puedo comprar? Pues esto sería una ecuación que sería el número de peras por PSU1 más el número de manzanas por PSU2, pues sería igual al dinero que yo tengo. Y ya, ahí puedo tener un montón de opciones.

¿Pero qué pasa si resulta que yo sé que las manzanas tienen unas calorías, las peras tienen otras, y que yo necesito para mi alimentación una cantidad total de calorías diarias? Pues eso de alguna forma me condiciona otra vez, me liga el número de manzanas que yo tengo que tomar y el número de peras que yo tengo que tomar. Pero por otra parte no puedo permitirme el lujo ni de tomar más ni menos, porque también viene condicionado por la ecuación anterior que me venía fijada por el precio total. Pues entonces ya tengo dos ecuaciones y un sistema.

¿Y si consigo resolver ese sistema? Y por cierto, si ese sistema tiene solución, pues podré comprar las peras y las manzanas y estar perfectamente alimentado. Y eso gracias a haber sabido matemáticas especiales, claro. Lo que me hace pensar que no todos los sistemas de ecuaciones tienen solución.

No, no, no, no. Ni mucho menos. En los sistemas, bueno, estudiar si un sistema tiene o no solución, se llama discutir el sistema, y los sistemas pueden ser incompatibles, es decir, que no tienen solución, o pueden tener solución, en cuyo caso diremos que son compatibles.

Y las cosas dentro de los compatibles hay que distinguir dos casos. Que tengan una única solución, y diremos que el sistema es compatible determinado, o puede tener a su vez infinidad de soluciones, en cuyo caso diremos que el sistema es compatible indeterminado. ¿Es fácil saber si un sistema de ecuaciones tiene solución o no? Bueno, para resolver ya, para discutir el

sistema y resolverlo, pues hay una serie de métodos, que son los que el alumno va a tener oportunidad de estudiar, tanto en este tema, como en este tema, y sobre todo en el tema 9. Puesto que el tema 8 es de carácter instrumental, que ahora explicaremos.

En este tema 7, al alumno se le plantean dos métodos. El método de sustitución, y el método que se denomina de Gauss. Y que se basa en hacer transformaciones en el sistema, de forma que no altere las soluciones del mismo.

Es decir, produciendo sistemas que se denominan sistemas equivalentes. Tanto un método como otro, en la práctica, son inviables cuando el número de ecuaciones y el número de incógnitas son elevadísimas. Como se plantean, por ejemplo, en los modernos problemas de economías, tanto ya nacionales como internacionales, o a la hora de querer simular tendencias económicas, el número de ecuaciones, de incógnitas y de ecuaciones, suele ser numerosísimo.

Lo cual hace que, con estos métodos, en la práctica, sea irresoluble. Y sea realmente imposible de resolver. Entonces, serían dos los métodos de resolver una ecuación, en caso de que tenga resoluciones así, ¿verdad? No, no, no.

No solamente así, perdóname que te interrumpa. Serían los métodos primeros, sin más, como podríamos decir de manera directa, sin utilizar otros instrumentos ajenos, son el método de sustitución y el método de Gauss. Pero realmente, el alumno va a estudiar en el tema 8, una herramienta fundamental y de una utilidad inmensa para la resolución de problemas, como se verá en el tema 9, que son las matrices y los determinantes.

Bien, y en la práctica, para que el alumno lo visualice, ¿dónde se pueden encontrar qué es lo que nos resuelve las ecuaciones? ¿En qué carreras? ¿Qué es lo que nos resuelve los sistemas de ecuaciones? Bueno, además de en la vida real, y sobre todo en economía, o en cuestiones de estrategia, de la teoría de estrategias, como por ejemplo el caso elemental que he expuesto antes, que ya al final no sé si he mezclado bien los PSU1 y los PSU2, porque lo he hecho un poco de cabeza, y no sé si eran los precios de las peras de las manzanas, o hemos revuelto los de las manzanas con las peras, pero esto, el mismo alumno a lo largo del curso va a encontrar ejemplos en los que va a hacer utilización de las técnicas que aprendan estos temas. Por ejemplo, cuando pretenda hallar intersecciones de rectas, o estudiar realmente si las rectas se cruzan o son paralelas, o si tienen un punto de intersección, o si son coincidentes, también a la hora de determinar, por ejemplo, cuestiones como la dependencia o independencia de un sistema de vectores, en el plano y sobre todo en el espacio, y en infinidad de cuestiones más. Repito, aquellos alumnos que estudien económica se los encontrarán relacionados con problemas de programación lineal innumerables veces.

Por tanto, todos los temas, desde luego, son muy importantes, pero este tema 7, ¿lo es especialmente? El tema 7, conceptualmente, es muy importante, pero de cara a la práctica para el alumno, quizás sea mucho más interesante todavía el tema 8, que nos proporciona la herramienta a utilizar, y el tema 9, que nos dice cómo utilizar esa herramienta. Pues vamos a hablar de esas herramientas, el tema 8, matrices y determinantes. ¿Qué es una matriz? Bueno,

una matriz realmente es un conjunto de números distribuidos en filas y en columnas.

Aunque esto parezca así, como muy etéreo, luego en la práctica no lo es, porque cuando uno utiliza el método de Gauss, se da cuenta que lo único importante son los coeficientes del sistema, su distribución, tanto en filas como en columnas. Entonces, lo único que se hace realmente es abstraer del sistema lo que realmente nos interesa, que son los coeficientes, y colocarlos, distribuirlos en filas y en columnas. Ahora bien, las matrices permiten manipulación, su manipulación, ¿no? Y de hecho, el alumno verá que las matrices se pueden sumar, se pueden multiplicar por números reales, se pueden transponer, cambiar las filas por columnas, incluso se pueden multiplicar.

Se pueden multiplicar en casos especiales, cuando el número de columnas de la primera matriz coincide con el de filas de la siguiente. En general, el alumno, cuando tenga matrices cuadradas, podrá hacer todas estas operaciones sin preocuparse, puesto que todas tendrán igual número de filas que de columnas. Es decir, que se puede operar con matrices.

Se puede operar con matrices, efectivamente. ¿Y en cuanto a los determinantes? Bien, los determinantes realmente son una expresión, un valor que se obtiene a partir de la matriz, que realmente, de alguna forma, está íntimamente ligado con la matriz, y que gozan de unas propiedades que nos recuerdan un poco a las propiedades que tenían los sistemas a la hora de manipular sus ecuaciones para conseguir sistemas equivalentes. El alumno debe aprender a resolver determinantes, puesto que lo va a necesitar a lo largo de toda su... Bueno, yo creo que me atrevería a decir que en algunas carreras, ya para siempre, el alumno debe aprender y ejercitarse a calcular determinantes.

Hay unas fórmulas para resolver determinantes de matrices cuadradas y de matrices de tercer orden ya establecidas y que el alumno debería de memorizar, a nuestro juicio. Y luego, para matrices cuadradas de orden superior a 3, pues el alumno puede o bien emplear la técnica que aparece en el libro de desarrollo por los menores complementarios, o bien utilizar transformaciones que permitan pasar del determinante que tiene a otro determinante equivalente que tenga una resolución mucho más fácil. Y en cualquier caso, como vuelvo a decir, siempre se puede aplicar la fórmula de la descomposición mediante los menores complementarios.

Bien, hemos visto el tema 7 y el tema 8. Y como nos has dicho, con estos llegamos al tema 9. En el tema 9 utilizamos las matrices, utilizamos los determinantes y utilizamos los sistemas de ecuaciones lineales. Es llegar un poco a la resolución de todo. Efectivamente, efectivamente.

Es como si un poco el tema 8 tuviera su justificación en la solución de los problemas que hemos planteado en el tema 7. Dado que, como bien dije, cuando el número de ecuaciones y de incógnitas es muy elevado, los métodos directos explicados en el tema 7 son inviables en la práctica. Por eso hemos introducido las matrices y los determinantes que son una herramienta que el alumno verá a lo largo del tema 9, que es una herramienta indispensable para el tratamiento y la resolución y el estudio de los sistemas. La regla de Kramer nos permite, en

sistemas de ecuaciones lineales que tienen igual número de ecuaciones que de incógnitas, conseguir la solución de manera directa.

Aplicando el método, nos sale la ecuación, la solución, de forma directa, con sólo saber calcular determinantes. Mientras que ya, para aplicar el método de Rochefouvenius, para eso realmente el alumno debe aprender a hallar el rango de una matriz y comprobar si el rango de la matriz coincide con el rango de la matriz ampliada, ya que el sistema será compatible cuando el rango de la matriz coincida con el rango de la matriz ampliada del sistema y, si además este valor común coincide con el número de incógnitas, pues entonces será compatible determinado. Si este número es estrictamente menor que el número de incógnitas, pues será compatible indeterminado.

Es decir, tendrá una infinidad de soluciones. Con estos tres temas hemos hecho casi un todo, ¿verdad? El 7, el 8 y el 9 llevan una sucesión perfecta, por eso están en este orden. ¿No es así? Con estos tres temas tenemos ya un concepto general y global para poder resolver las ecuaciones lineales.

Efectivamente. En el tema 7 planteamos lo que es un sistema, algunos métodos directos de solución y vemos que en la práctica esto es inviable. Entonces introducimos las herramientas que son las matrices y los determinantes, estudiamos sus propiedades, su manejo y, en el caso de los determinantes, su cálculo.

Y en el tema 9 aplicamos las herramientas introducidas en el tema 8 para la resolución realmente de los sistemas mediante la regla de Cramer para sistemas con igual número de ecuaciones que de incógnitas y el método de Rochefrovenios para sistemas ya generales. En el tema 10 cambiamos totalmente. Profesor Antonio Costa, vamos a hablar de geometría.

¿Cuáles son los elementos de la geometría? Los elementos de la geometría se suelen decir que son los puntos, son las rectas, son los planos. Creo que son conceptos que todos en la vida práctica, aunque no los hemos visto realmente porque nadie ha tocado nunca ni ha visto un punto ni una recta en realidad, pero todo el mundo más o menos conoce o tiene una idea de lo que se está diciendo cuando uno dice que tiene una recta o da una recta. Estos son los elementos y se estudian cuestiones relacionadas con estos elementos.

Por ejemplo, ¿qué quiere decir que dos rectas se cortan en un punto? ¿O qué quiere decir que un punto es exterior a una recta o que la recta pasa por dicho punto? Que las rectas son paralelas, etc. ¿Entramos ya quizá en los temas que a mí me parecen más abstractos? Bueno, depende de cómo se mide. Yo creo que los son menos porque aunque en realidad lo que decía antes, que un punto, tal y como se suele definir en geometría clásica, en los elementos de Euclides, es algo que no tiene dimensiones pero realmente eso no existe.

Pero bueno, todo el mundo más o menos cuando pinta un punto que realmente ya estoy empleando la misma palabra, pues sabe que es un punto y que realmente eso es lo que aunque no quiere decir lo mismo que hemos dicho en la definición, pero tiene ese concepto de

lo que realmente es. Y bueno, en realidad, en geometría se estudia, por ejemplo, problemas de medida de áreas o medida de longitudes que todo el mundo tiene que hacer hasta para hacerse un traje si es más lejos. En este tema 10 también se habla de triángulos.

Es la figura más sencilla que se puede construir con líneas y con puntos y clásicamente también es la primera que se estudia. Además, si después uno tiene que tener una figura más complicada, el método más usual y más fácil es dividirla en triángulos. Si uno realmente sabe cómo hacer cosas con triángulos, sabe cómo medir los lados de un triángulo, cómo medir el área de un triángulo, después a la base de una descomposición conveniente, va a poder reducir ese problema a un problema de triángulos.

¿De qué más nos habla este tema? Bueno, en el tema de triángulos hay dos teoremas que también son muy clásicos y que a todos nos tienen que sonar de nuestra niñez, de nuestros primeros estudios, que son el teorema de Tales y el teorema de Pitágoras. Yo creo que cualquier niño ya por la calle le puede preguntar sobre ese teorema. Pero aunque sea someramente nos podría explicar un poquito.

El teorema de Tales lo que quiere decir es establecer las relaciones que existen entre triángulos que tienen los mismos ángulos. Tienen los tres ángulos iguales entre sí. Puede ser usado, por ejemplo, para medir una altura de un edificio o de una montaña que es inaccesible.

O sea, que no podemos llegar a medir con una cinta métrica. No podemos poner una cinta métrica que vaya desde el piso número 12 hasta el suelo. Entonces Tales, hace muchísimos años, ideó un sistema que se trataba simplemente de comparar cuáles eran las sombras de una vara cuya altura conocía y la sombra que proyectaba el edificio.

En este caso no era un edificio, sino que era una pirámide. Y entonces, de esa forma, conocer la altura de la pirámide. El teorema de Pitágoras tiene también un claro uso en este caso.

Los triángulos que se consideran tienen que tener siempre un ángulo recto. Es la única cosa que es importante que sepan muy bien. Y entonces, una vez tienen un ángulo recto, hay dos tipos de lados especiales.

Los que se llaman catetos y el otro que es la famosa hipotenusa. La relación entre las medidas de los catetos y la hipotenusa, pues viene hablada por el teorema de Pitágoras. Y entramos ya en el tema 11.

El tema 11 nos habla de trigonometría. ¿Qué es la trigonometría? Aunque tiene un nombre que también, desgraciadamente, es muy conocido y que algunos chicos, no tan chicos, cuando se hablan de trigonometría se quedan muy asustados y diciendo qué cosa tan difícil, tan complicada. Realmente, se reduce casi al teorema de Tales y al teorema de Pitágoras.

Lo que ocurre es que, ya formalizado un poco más y en un paso más allá, pues aparecen unas razones que son las que se llaman razones trigonométricas. Pero que realmente, como etimológicamente dice la palabra trigonometría, sirven para medir triángulos también.

Además, triángulos, rectángulos.

¿Cuáles son estas razones trigonométricas? Creo que también todos, más o menos, por cultura general, sabemos que son el seno, el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante. Entonces, tienen las definiciones de todas estas razones trigonométricas aparecen en el tema 11. Tienen que saberlas, tienen que saber también unas fórmulas que relacionan unas con otras.

Entonces, bueno, pues son unas fórmulas que al principio parecen un poco complicadas y difíciles de memorizar. Pero si uno realiza muchos ejercicios y practica con ellas, al final acaban siendo muy naturales. Y además, que se reduce envuelto a lo mismo, es el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales, nada más.

Más que nada, entonces, en este tema 11 se trata de memorizar una serie... Sí, primero que sepan la definición de las razones trigonométricas muy bien, que sepan lo que quiere decir cada una de ellas y después prácticamente se reducen a dos fórmulas que tienen que conocer muy bien. Entonces, una vez conocen estas fórmulas pues podrán, por ejemplo, dada una de las razones trigonométricas de un ángulo podrán calcular todas las demás. O bien, pues teniendo ciertas propiedades de un triángulo, podrán calcular también las razones trigonométricas del resto de los ángulos del triángulo.

O bien, podrán también calcular las razones trigonométricas de un ángulo conociendo las razones trigonométricas de otro. Entonces, bueno, pues hay unas fórmulas que dan lugar a estas relaciones y las tienen que conocer, desde luego. El tema 12, la geometría analítica.

Bueno, pues el tema 12 es otra de las grandes revoluciones en matemáticas. Es lo que se llama la introducción del uso de las coordenadas. Algo que ahora ya no es tan familiar.

O sea, que prácticamente las curvas y la representación de puntos por números es constante. A nadie le choca que le digan tal avión está en unas coordenadas tal y cual. Dice dos números.

Pero en realidad no está diciendo que ese avión se está moviendo en números, está moviéndose en un espacio físico. Entonces, es como un espacio, algo que es geométrico que, como hemos dicho antes, pues es hasta incluso abstracto, pero que quiere dar a conocer una realidad que existe, pues después se traduce a números. Entonces, eso fue la gran idea que tuvo Descartes.

Realmente, pues bueno, que llegó a revolucionar las matemáticas y en particular la geometría. También estos tres temas tienen una correlación. Efectivamente.

Sí, en principio incluso tiene una correlación hasta temporal, podríamos decir. El primero de ellos es casi las matemáticas de los griegos. Y después ya son las matemáticas un poco más modernas.

Quizá podríamos hablar ya de lo que empezaba a florecer antes de la llegada de Descartes, que

realmente fue el que vio el paso definitivo y llevó a cabo esta gran idea. Si tuviéramos que destacar algo de estos tres temas para el alumno, por supuesto, ¿qué es lo que destacaríamos? Bueno, pues yo diría que sepan bien lo que dicen esos dos teoremas fundamentales el teorema de Tales, el teorema de Pitágoras, que sepan la definición de las razones trigonométricas y que sepan esas fórmulas que relacionan esas razones trigonométricas. Y por último, pues que sepan bien qué quieren decir las coordenadas de un punto y que si le dicen dos números consecutivos, cerrados entre paréntesis, pues que quiere decir un punto en el plano y que si les dan tres números, pues quiere decir un punto en el espacio.

Y después también, en este último tema utilizamos las coordenadas para introducir las razones trigonométricas de ángulos que ya no aparecen en triángulos porque son demasiado grandes. Y entonces, bueno, pues de esa forma también esos ángulos admiten razones trigonométricas y después eso permitirá introducir lo que se llaman las funciones trigonométricas que son de un uso muy importante sobre todo al final del texto. Bien, hemos visto estas seis lecciones, estos seis temas todos muy importantes pero a mí me gustaría, y supongo que al alumno mucho más que a mí saber cómo se los deben preparar en qué tienen que hacer hincapié qué es lo más importante y cómo deben estar ya estudiándolos.

Profesor Pedro Jiménez. Bueno, como los temas siete, ocho y nueve son eminentemente de carácter práctico lo que el alumno pensamos que debería de hacer preferentemente concentrar sus esfuerzos debería ser primero el trabajo con las matrices. Dada una matriz saber encontrar su matriz transpuesta saber operar con matrices y en el caso de que sean matrices cuadradas, aquellas que tienen como dijimos el mismo número de filas que de columnas, pues saber calcular su determinante.

Muy importante estar habituado al cálculo de determinantes lo cual además le va a permitir al alumno poder calcular, en caso de que este determinante sea 1000, la matriz inversa de la matriz con la que trabaja. Y luego concentrarse yo diría que hacer ejercitarse lo más que se pueda en la resolución de sistemas, tanto aplicando la regla de Cramer o bien el método Rochefrou-Venius. Para lo cual vuelvo a repetir que es indispensable que el alumno sepa de manera fluida calcular determinantes, ya que por ejemplo para la regla de Cramer se basa exclusivamente en cálculo de determinantes, el método Rochefrou-Venius se basa en el cálculo del rango de la matriz que a su vez se encuentra, se determina mediante determinantes de sus matrices.

Como hablábamos es todo una correlación. Quizás sea lo más importante aprender el concepto y luego práctica, práctica, práctica. Pues preferentemente yo aconsejaría al alumno que dedique mucho tiempo la mayor parte del tiempo a la resolución de problemas, de casos prácticos de cálculo real de determinantes de matrices y resolución de sistemas, teniendo muy en cuenta que muchas veces al discutir un sistema, por el método Rochefrou-Venius se puede encontrar, bueno y también por el método de Cramer, de que alguno de los coeficientes del sistema a su vez sea un parámetro y se encuentre con la cuestión de discutir ese sistema según los distintos valores de este parámetro.

Bueno, tanto en el texto de teoría como en el de problemas, pues el alumno puede encontrar abundantes ejemplos al respecto. Y con respecto a los otros temas, perdón, el 10, el 11 y el 12, ¿qué debemos hacer? El tema 10 es conceptual en su primera parte entonces, bueno, aunque son conceptos que espero que ya todos conozcan, pues también es bueno el ejercitarse sobre todo en el uso de los teoremas de Pitágoras y de Teorema de Tales. Entonces, también son problemas muy prácticos donde, bueno, pues se les da ciertos datos que tienen que conocer y se les pide otro que no aparece en el triángulo, por ejemplo uno de los lados del triángulo conociendo, pues a lo mejor un ángulo o el otro lado.

Y también lo mismo ocurre con el tema 10, perdón, con el tema 11 entre las razones trigonométricas pues ahí también tienen que saber utilizar estas razones trigonométricas para lo cual es conveniente que sepan qué quiere decir cada una de ellas y después tienen que saber usar pues un poquito también la calculadora en la calculadora pues suele haber unos botones que vienen con la letra sin y la letra, las letras cos y las letras tan, ¿no? pues lo que quiere decir es el seno, el coseno y la tangente bueno, pues si tienen que saber que cuando aprietan esos botones después de un número que quiere decir una medida de un ángulo, pues les da esas razones trigonométricas, entonces tienen que saber aplicar ese número que les ha respondido la máquina con problemas prácticos también vienen una buena colección de problemas por supuesto en el libro de problemas que, bueno, yo creo que como todos los profesores de la asignatura recomendamos vivamente. ¿Y en cuanto al tema 12 el último? El tema 12 pues es sobre todo conceptual porque se trata pues este tema de las coordenadas que, aunque realmente ya no nos parece tan natural y tan llevado y traído que nos parece muy fácil, pero realmente costó mucho tiempo y no es tan sencillo y realmente si hay alguien que es la primera vez que se encuentra con esto pues sé que les va a costar y que le va a resultar incluso extraño, pero bueno como creo que no va a ser el caso por si acaso se ha puesto este tema para realmente que todos aquellos consigan esta familiaridad y después el tema de las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera pues es un poco volver otra vez a la problemática del tema 11 y hacer ejercicios Por lo tanto el consejo es que le dediquen el tiempo que puedan y desde luego que aprendan los conceptos y hagan muchos ejercicios en este libro de problemas Pues muchas gracias a los dos, muy buenas noches Muy buenas noches Esta noche en matemáticas especiales hemos visto los temas que van del 7 al 12 El próximo 15 de enero nos ocuparemos de los temas del 13 al 17 y nosotros por hoy nos despedimos Gracias por su atención y hasta mañana La UNED les ha ofrecido dos horas y media de radio educativa Mañana volveremos a nuestra hora habitual y en esta misma emisora Nuestro primer programa será Revista de Derecho Continuaremos con el informativo semanal de la UNED y por último el curso de acceso Por su compañía y que pasen una feliz noche Más información www.alimmenta.com Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org ¡Suscríbete al canal! Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org