

... .. Matemáticas básicas, guión número 38. Estructuras. Contenido didáctico José R. Marco Franco. Vamos a hablar en esta emisión de las estructuras matemáticas. Este tema es motivo de muchas consultas y vamos a aclarar las dudas que ustedes plantean en sus cartas. Antes de empezar a hablar de estructuras, tenemos que definir lo que es la estructura matemática.

se llama ley de composición interna. Empezaremos dando la definición matemática y luego iremos comentando y aclarando distintos aspectos de ella. Supongamos que tenemos un conjunto A . Una ley de composición interna sobre A es una aplicación del producto cartesiano de A por A en A . Esta aplicación a cada par de elementos del conjunto le asocia otro elemento que también pertenece a A . Entonces, observen que al dar sobre un conjunto A una ley de composición interna, esto nos permite operar sobre el conjunto A , pues a cada par de elementos de A la aplicación le hace corresponder otro elemento del conjunto A . Por tanto, podríamos decir que ley de composición interna y operación son palabras sinónimas. Lo que ocurre es que cuando se habla de operación, ustedes la relacionan con suma, resta, multiplicación y otras conocidas. Les sorprende, por ejemplo, el oír que al sumar

números naturales lo que hacen es establecer una aplicación entre el producto cartesiano de los números naturales por los números naturales sobre los números naturales. Vamos a analizar un poco lo que hacen al sumar números naturales para que vean que es cierto lo que hemos dicho anteriormente. Efectivamente, analizaremos lo que se hace al sumar. Si sumamos 2 más 3 me da 5. ¿Qué hemos hecho? Pues simplemente establecer una aplicación de n por n sobre n , por lo cual al par 2, 3 le asociamos su suma que nos da 5. Por tanto, deben tener claro que al dar una ley de composición interna lo que nos van a permitir es operar sobre el conjunto que se define. Antes de empezar a ver cómo se puede dar la ley de composición interna, vamos a distinguir cuándo una operación es ley de composición interna o no. No lo es.

que para que esto quede claro, lo vamos a hacer mediante ejemplos. Pongan atención, ya que esto es fundamental para entender todo lo relativo a estructuras. Primer ejemplo. Sobre el conjunto de los números naturales, ¿la operación suma es una ley de composición interna? Lo único que tenemos que ver es si es una aplicación de n por n sobre n . Es decir, ver si siempre el resultado de sumar da un número natural, como si sumo dos números naturales, siempre me da un número natural. La suma es una ley de composición interna sobre los números naturales. Ejemplo segundo. ¿La operación resta sobre el conjunto de los números naturales es ley de composición interna? Hagamos lo mismo, pero en este caso observamos que si restamos 5 menos 3, nos da que es... Pero por el contrario, si restamos 3 menos 3, nos da que es...

menos 5 nos da menos 2, que no es natural. Por tanto, como no siempre nos da natural, resultará que la resta no es ley de composición interna sobre los naturales. Ejemplo tercero. La operación suma sobre el conjunto de los números pares naturales. ¿Es ley de composición interna? La respuesta es sí, ya que al sumar dos números naturales pares siempre nos dará un número natural par. Ejemplo cuarto. El mismo problema sobre los números impares. Ahora la respuesta es no, ya que al sumar dos números naturales impares el resultado no nos da impar. Creemos que con estos ejemplos quedará claro el averiguar cuándo una operación definida sobre un conjunto es ley de composición interna sobre él. Por tanto, hemos de hacer una puntualización. Anteriormente hemos dicho... ..que ley de composición interna y operación...

eran sinónimos. Quede claro que toda ley de composición lo que permite es operar sobre dicho conjunto, pero hay operaciones que no son leyes de composición interna y, por tanto, no permiten operar sobre tales conjuntos. Cuando la operación nos permite operar sobre el conjunto, diremos que la operación es cerrada. Entonces, cuando les den a ustedes una operación sobre un conjunto, lo primero que tienen que probar es si esta ley es de composición interna o no. Veremos ahora cómo se puede dar una operación o ley de composición interna sobre un conjunto. Para ello, recordemos que en la emisión anterior vimos dos formas de dar las aplicaciones. Veremos, por tanto, que habrá dos formas de dar las operaciones. Primera forma. Supongamos que el conjunto sea un conjunto de dos formas. Y sea A mayúscula igual a B.

C y queremos dar una operación sobre él. Lo que tendremos que hacer es dar una aplicación de A por A sobre A. Entonces, esto se hace sabiendo a todos los pares de elementos del conjunto A qué elemento de dicho conjunto le asociamos. ¿Cómo se dan estas operaciones? Mediante una tabla de doble entrada. Muchos de ustedes preguntan cómo se calcula esta tabla y fíjense que la tabla se la damos nosotros y nunca se les pide que la calculen ustedes. Resumiendo, en el caso de que el conjunto sea finito y la operación no sea conocida, les daremos una tabla de doble entrada y se les indicará a cada par de elementos cuál les corresponde. Cuando tengan una operación dada mediante una tabla de doble entrada, es muy fácil de ver si es ley de composición interna sobre un conjunto, pues para que lo sea, todos los resultados tienen que ser elementos de dicho conjunto. Segunda forma. Supongamos que el conjunto A es el conjunto A.

Supongamos que los conjuntos sean infinitos. Por ejemplo, los más utilizados son los naturales enteros, pares, impares... Puede ocurrir que nos den una operación que conocemos como suma, resta, multiplicación, potencia... O puede ocurrir que la operación sea un conjunto de los anteriores. Así nos pueden dar la operación sobre el conjunto de los números enteros diciendo A mayúscula operado con B mayúscula es igual al doble de A minúscula menos B minúscula. Esto nos permite saber a cada par de números enteros cuál les hacemos corresponder. Y así... 4 menos 3 igual a 1. 5 operado con 2 nos da 25.

5 menos 2 igual a 23. Fíjense que cuando nos den así la operación siempre emplearemos dos elementos genéricos y se dirá A pequeña operado con B pequeña pero este A y B tomarán todos los valores del conjunto sobre el que se define la operación. Creemos que con todo esto habrá quedado claro lo relativo a leyes de composición interna. Pasemos ahora a ver qué propiedades suelen tener las leyes de composición interna y que son primero propiedad asociativa, segundo propiedad conmutativa, tercero propiedad del elemento neutro y cuarto propiedad del elemento simétrico. Creemos que no hay ninguna dificultad en las dos primeras propiedades pero creemos conveniente hacer alguna puntualización sobre la tercera y la cuarta propiedad. Elementos de la propiedad Elemento neutro

Consideremos el conjunto de los números naturales con la suma. El elemento neutro es el cero. Entonces, observemos lo siguiente. 1. Si sumo cero con cualquier número, me da ese número. 2. Si sumo cualquier número con cero, me da el primer número. 3. Cero es un número natural. 4. Cero es el único número natural que verifica las dos primeras condiciones. Esto nos va a indicar cómo encontrar el elemento neutro y qué condiciones ha de verificar. Por tanto, supongamos que tenemos un conjunto y sobre él una operación y queremos averiguar si tiene elemento neutro. Tenemos que encontrar un elemento que llamamos U que

al operarlo con cualquier elemento A nos dé este A y vamos a comprobar que si opero A con U también nos dará A .

Una vez que tenemos este u , para que sea elemento neutro tenemos que comprobar que es único y que pertenece al conjunto. Si alguna de estas condiciones no se cumple, no tiene elemento neutro. Por ejemplo, el conjunto de los números pares con la operación multiplicación. La multiplicación es ley de composición interna, ya que si multiplicamos dos números pares nos dará otro número par. Intentemos ver si tiene elemento neutro y observemos que uno multiplicado por cualquier número nos da este número, que es único. Pero el uno no pertenece al conjunto de los pares, por tanto la conclusión es que no tiene elemento neutro. Elemento simétrico. Consideremos el conjunto de los números enteros con la operación suma. Cada elemento tiene un número. Tiene simétrico y este es su opuesto.

Así, el simétrico del 2 es el menos 2. Observemos lo siguiente. Primero, si sumamos un elemento con su simétrico, nos da el elemento neutro. Segundo, si sumamos el simétrico de un elemento con dicho elemento, nos da el elemento neutro. Tercero, el simétrico es un número entero. Y, por último, cada elemento tiene un simétrico distinto. Por tanto, si nos dan un conjunto con una operación y nos preguntan si tiene elemento simétrico, para que esto ocurra es necesario que tenga elemento neutro. Y para encontrar el simétrico de cada elemento, buscaremos un elemento de forma que, operando con él, me dé el elemento neutro. Pero haciendo la salvedad de que cada elemento tiene que tener un simétrico distinto y que éste ha de pertenecer al conjunto,

conjunto que estamos tratando. Así, por ejemplo, el conjunto de los números naturales con la suma no tiene simétrico, ya que, aunque existen elementos que sumados con ellos me dan cero y así 2 menos 2 da cero, 5 menos 5 da cero, resulta que el menos 2, el menos 5 no son números naturales y, por tanto, no tienen simétrico. Una vez visto todo esto, pasaremos a estudiar las estructuras que se pueden dar en matemáticas y que ustedes deben saber. Para que podamos hablar de estructuras matemáticas, es necesario que nos den un conjunto y, sobre él, una operación que ha de ser ley de composición interna. Por tanto, lo primero que tendremos que ver es si la operación que nos dan es ley de composición interna. En caso contrario, no tendremos ninguna estructura. Una vez comprobada que sí es ley de composición, estudiamos qué propiedades tiene y, sabiendo éstas, las estructuras que se dan,

Son las siguientes. Semigrupo. Si la ley de composición interna es asociativa. Grupo. Si la ley de composición interna es asociativa, posee elemento neutro y simétrico. Grupo conmutativo. Si la ley de composición interna es asociativa, conmutativa, posee elemento neutro y simétrico. Puede ocurrir que el semigrupo tenga elemento neutro. Entonces es más completo decir semigrupo con unidad. Puede ocurrir que tenga la propiedad conmutativa. Entonces debemos decir semigrupo conmutativo. ¿Qué quiere decir que un conjunto con una ley de composición interna es un semigrupo con unidad y conmutativo? Esto quiere decir que la ley de composición interna tiene las propiedades asociativa y conmutativa y además tendrá elemento neutro. Para terminar, vamos a ver qué es un subgrupo. Un subgrupo es una parte de un grupo. Un grupo que consiste en un grupo.

considerándola independiente del grupo, tiene estructura de grupo. Por tanto, si nos dan un subconjunto de un grupo y nos dicen que comprobemos que es un subgrupo, lo que tenemos que hacer es ver si en este subconjunto la ley de

composición es interna y si tiene las propiedades para que sea grupo. Si esto ocurre, diremos que es un subgrupo. Con esto terminamos la tercera emisión de esta serie de repaso. Gracias por ver el video.