

AC 15 66

Hola, buenas noches, bienvenidos a este Tiempo de Radio Educativa y Cultural, que la UNED propone a los alumnos del curso de acceso directo a la universidad para mayores de 25 años, el CAD. Desde aquí esperamos sus sugerencias para poder ayudarles de la manera más eficaz. Escribanos a Curso de Acceso, Departamento de Radio, UNED, Ciudad Universitaria Sin Número, 28040 de Madrid.

En el programa de esta noche, Matemáticas Especiales, veremos los temas que van del 13 al 17. El tema 13 nos habla de vectores del plano, definiciones, operaciones con vectores, el producto escalar, combinación lineal de vectores. El 14 nos habla de los números complejos, números complejos en forma binómica, operaciones con números complejos en forma binómica, y la forma trigonométrica de un número complejo.

El tema 15, vectores del espacio, producto vectorial, otras propiedades del producto vectorial y la estructura de espacio vectorial. El tema 16, geometría analítica del plano, los puntos del plano, rectas en el plano, ecuaciones de una recta en el plano, posiciones relativas de dos rectas, problemas métricos en el plano y nociones sobre la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola. Por último, veremos el tema 17, geometría analítica del espacio.

Este tema no será materia de examen, aunque sí se recomienda a su estudio. Pues bien, hoy compartiremos nuestro tiempo de Matemáticas Especiales con los profesores Ernesto Martínez, Víctor Fernández y José Leandro de María. Esta noche en nuestro programa de Matemáticas Especiales nos acompañan los profesores Ernesto Martínez, Víctor Fernández y José Leandro de María.

Muy buenas noches a los tres. Vamos a ver los temas que van del 13 al 17, ambos incluidos, y podemos empezar por el tema 13, que nos habla de vectores del plano. Profesor Ernesto Martínez, ¿cómo podríamos definir un vector del plano? En primer lugar quisiera decir que este tema, posiblemente para muchos alumnos, es su primer contacto con los vectores.

Los alumnos están acostumbrados a manejar magnitudes escalares, y los vectores ya son una entidad que tiene dirección, sentido y un valor absoluto, un módulo. Intuitivamente, no como una definición estricta, sino intuitivamente podemos representar un vector en el plano inicialmente por una flecha. Dado los dos puntos del plano distintos nos marcan una dirección, una recta, y la longitud entre esos puntos A y B, pongamos, si le asociamos una flechita de A a B o de B a A, tenemos el vector el vector fijo A B o el vector fijo B A. Esto sería una definición intuitiva, pero hay otras quizás más concretas.

Sí, luego también podemos definir un vector por coordenadas, es más, en el conjunto de vectores se establece una relación de equivalencia, por lo cual es interesante que el alumno repase este concepto de relación de equivalencia, entre el conjunto de vectores dado uno, este que hemos indicado antes, el A B, si nos fijamos en el conjunto de vectores equivalentes a él, en

el sentido de que son paralelos y con el mismo módulo y el mismo sentido, entonces todo ese conjunto de vectores a su vez es un único vector que vamos a llamar vector libre, con lo cual de hecho hoy al final lo que vamos a trabajar es con vectores libres, no con esos vectores fijos representados por una flecha. En cuanto a coordenadas, fijado un origen y unos ejes coordenados, que se ha visto en temas anteriores, pues con el origen O y cualquier punto A , ahora ya designaremos a un vector libre sencillamente por el par A . También a un alumno inicialmente le puede extrañar que en lugar de una magnitud tengamos dos coordenadas para designar el vector, pero esos dos numeritos A y B nos fijan perfectamente el módulo, la dirección y el sentido. ¿Y se puede operar con vectores? Sí, aquí hay muchísimas operaciones con vectores.

En este curso pues vemos fundamentalmente la suma, el producto por un escalar y luego dedicamos una sección completa a una operación muy importante entre vectores que es el producto escalar. De eso podemos hablar a continuación, ¿qué es el producto escalar? Pues como su nombre indica, el producto resulta ser un escalar, es decir, un número real. También puede parecerle algo extraño que cojamos dos entes representados por dos flechitas y su producto salga un número.

Puede hacerse esta operación, y en el libro la definimos, mediante las coordenadas, pero en resumen ese número tiene una relación con la longitud de esos vectores, el módulo, y con el ángulo que forman. De hecho el número es el producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman. También conociendo el producto escalar y conociendo los módulos de los dos vectores, nos sirve también para hallar el ángulo que forman las rectas, como luego se verá en otros temas, por ejemplo.

Quizá por la dificultad que tenga este concepto podríamos dar algún ejemplo para aclararlo más. Sí, pues cuando me estoy refiriendo al vector libre 3 menos 2 , me estoy refiriendo a una flecha que empieza en el $0,0$, fija el origen de coordenadas y los ejes, y su extremo lo tiene en el punto de coordenadas 3 menos 2 . Por tanto tiene un módulo que viene relacionado mediante el teorema de Pitágoras con esas dos cantidades, esas dos coordenadas, una dirección, la de la recta que pasa por los puntos $0,0$ y 3 menos 2 , y un sentido va del $0,0$ al 3 menos 2 . Y en cuanto a la combinación lineal de vectores, ¿qué es la combinación lineal de vectores? La combinación lineal de vectores es una nueva operación, es obtener un nuevo vector combinando la suma y el producto por escalares. Un vector, al multiplicarlo por un número escalar, lo único que hace es crecer su módulo.

El mismo vector de antes, 3 menos 2 , si lo multiplico por el número 2 , pues tengo el vector 6 menos 4 . Entonces si una serie de vectores, lo multiplico cada uno de ellos por un escalar y lo sumo, obtengo a su vez un nuevo vector que resulta ser combinación lineal de los anteriores. De este tema, el tema 13, ¿qué podríamos destacar? Aunque luego lo veremos al final del programa también, pero para ir poco a poco, ¿qué es lo más importante o lo que no le puede costar más? Casi siempre puede parecer un tópico decir que en este tema casi todo es importante, sobre todo porque es el primero. Luego viene el tema de vectores en el espacio y

ya es una generalización de este, pero al ser el inicial y luego además tiene múltiples aplicaciones los vectores en la geometría analítica, por tanto un alumno no debe continuar sus estudios si este tema no lo domina bien.

Pues podemos pasar al tema 14 con el profesor José Leandro de María. Vamos a hablar de los números complejos. ¿Cómo podríamos definir los números complejos? Bueno, me vas a permitir primero una pequeña introducción histórica.

El número complejo surgió de la necesidad de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Está en el campo de los reales. Bueno, con un sencillo cálculo se comprueba que no existe ningún número real que sea solución a $x^2 + 1 = 0$. Entonces se sugirió la existencia de este número y se denominó y . y es un número que tiene la propiedad de que multiplicado por sí mismo da menos 1. Por tanto, solución de la ecuación antes dicha. Históricamente es un avance importante en las matemáticas porque usando el número y toda ecuación polinómica se puede descomponer como factores lineales que pueden o no involucrar al número y . Esto en el álgebra tiene importancia e incluso ya en este curso básico se verá que en las integrales pues la descomposición en fracciones simples, por ejemplo, se puede resolver mediante número y , aunque es un nivel excesivo quizá para este curso, en primero ya lo empezarán a ver, no obstante.

Y en cuanto a las operaciones con números complejos en forma binómica, ¿se puede operar? Sí. Todo número complejo se define como un número real más otro número real multiplicado por el número y . Y inmediatamente uno se da cuenta de que a un número complejo se le asocia un vector que tiene por componentes el coeficiente sin número y y el coeficiente con número y . Entonces es una buena representación de los números complejos, es decir, realmente se reduce al plano con alguna matización que ahora haremos. Esto es la forma binómica de los números complejos, de tal forma que todo número complejo es de la forma $a+by$ donde a y b son dos números reales.

Bien entendido que la diferencia con lo que hemos hablado antes del plano es que b , es decir, la segunda componente de este vector, tiene una propiedad especial y es que viene multiplicada por el número y , lo cual añade a los números complejos, además de la operación suma de vectores, el producto por escalares, que también es una operación heredada de ser el plano euclideo, pues además también se pueden multiplicar números complejos y sale una estructura de cuerpo que se estudia al principio. De lo que nos está hablando es de la operación con números complejos en forma binómica. En forma binómica.

¿Y la forma trigonométrica de los números complejos? Bueno, pues ahora haciendo un pequeño ejercicio de imaginación y entendiendo un número complejo como un punto del plano, podemos entender también un número complejo $a+by$ como una flecha que está pinchada en el $0,0$, en el origen de coordenadas y que tiene su vértice en el punto $a+by$. Imaginándolo, vemos que ese número complejo tiene un módulo, justamente sería la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes, pero también tiene un ángulo que

forma con el semieje positivo de abscisas. ¿Entonces qué sería la forma trigonométrica de un número complejo? Bueno, pues asociarle a un número complejo otro par cuya primera componente sería el módulo y la segunda componente ese ángulo que forma con el semieje positivo de abscisas.

Pongo un ejemplo para aclarar. El número $1 + i$ también puede venir representado por el par raíz de 2, que es el módulo de dicho número, coma pi cuartos. Pi cuartos es el ángulo que forma con el semieje positivo de abscisas.

Esto sería un ejemplo de forma trigonométrica de un número complejo. ¿Podríamos poner algún ejemplo de forma binómica? Sí, por ejemplo, el $1 + i$, por ejemplo. Es decir, el $1 + i$ sería la forma binómica de un número complejo en una cuadrícula que se imaginase un alumno en el plano, a proyección 1 sobre el eje de las x y a proyección 1 sobre el eje de las y. Ese punto sería el número complejo $1 + i$ y su forma trigonométrica sería raíz de 2, pi cuartos.

¿Qué dificultades tiene este tema? Bueno, realmente es un tema importantísimo a nivel matemático y tanto de investigación como de docencia, pero la dificultad que tiene es fundamentalmente que se imaginen y que aprendan a manejar los números complejos de una forma tan eficaz como lo pueden hacer con los números reales. Bueno, se introducen nuevos factores. El producto no es tan elemental, pero se hace multiplicando en forma de monomios.

Es decir, eso se ve bien haciendo las cuentas que desgraciadamente por la radio es difícil de explicar, pero en el libro lo pueden encontrar, en cualquier libro de números complejos. Y vamos a pasar al tema 15, vectores del espacio. Profesor Víctor Fernández, ¿cómo podríamos definir un vector en el espacio? Bueno, un vector en el espacio es una generalización de los vectores del plano en los cuales ahora tenemos una tercera coordenada, es decir, que si los definimos por coordenadas, pues sería un conjunto formado por tres coordenadas, x, y, y, z. Y también esto tiene una interpretación geométrica, como en el caso del plano, como explicaba antes mi compañero Ernesto Martínez, representando los vectores pues mediante flechas que unen dos puntos del espacio, en este caso, los puntos cualesquiera en el espacio.

¿Quiere decir que se complica quizá algo más? Sí, se complica un poco más porque, que cabe duda, tenemos una coordenada más y una dimensión más, entonces es un poco más complicado. Sin embargo, bueno, pues se da un tratamiento sistemático del tema en el que se establece en primer lugar las analogías con los vectores del plano y así los vectores del espacio aparecen claramente como generalizaciones del plano. ¿Y qué es el producto vectorial? Bueno, el producto vectorial es una nueva operación que se introduce ahora entre vectores del espacio que no tenía un sentido propio en vectores del plano, pero ahora sí lo tiene.

Entonces, el producto vectorial de dos vectores, en principio, es otro vector. La definición que se da en el texto de producto vectorial es por medio de las coordenadas de los dos vectores que estamos multiplicando pero luego se da una interpretación geométrica del producto vectorial de dos vectores, digamos u y v, que será un tercer vector perpendicular tanto a u

como a v , cuyo módulo será igual al producto de los módulos de estos dos vectores por el seno del ángulo que forman, y el sentido de este vector sería, digamos, haciendo una analogía física o técnica, pues sería el sentido de avance de un tornillo, pues que cuando apretáramos, digamos, en el sentido queda desde el primer vector hasta el segundo vector. ¿Esto podría ser un ejemplo? Sí, bueno, esto sería un ejemplo claro de producto vectorial, porque ayudaría más a entenderlo lo que es la descripción del producto vectorial.

¿Qué propiedades tiene el producto vectorial? Bueno, el producto vectorial, así como el producto escalar era conmutativo, en este caso tenemos que es anticonmutativo y tiene otras propiedades que son de bilinealidad, por así decirlo, es decir, por ejemplo, el producto escalar de un vector por la suma de otros dos, pues sería igual a la suma de los productos escalares del primero por cada uno de los dos sumandos, y el producto vectorial de un vector por el producto de un número por otro vector, pues sería igual al producto de ese número por el producto vectorial de los dos vectores. No sé si queda un poco así dicho de prisa, pero lo pueden encontrar también en el libro de texto. También en el libro de texto hay ejemplos, ejemplos que pueden ser ilustrativos para el alumno.

Efectivamente, tienen una buena colección de ejemplos, porque como este apartado se refiere a un concepto nuevo que no se veía en el plano, como decía antes, pues tienen bastantes ejemplos para apoyarlo, y se puede decir también que una interpretación geométrica del módulo del producto vectorial de dos vectores, pues sería justamente el área del paralelogramo que determinan estos dos vectores. También quisiera destacar, en cuanto al producto vectorial, que para definirlo rigurosamente necesitamos el concepto de determinante. O sea, para leer aquí la definición es un poco larga y confusa, pero animaría a los alumnos a que repasen previamente el concepto de determinante que va a jugar un papel muy destacado en la definición del producto vectorial de los vectores.

La dificultad quizá de este tema 15, bueno, la dificultad que yo veo, que a mí me parece, es que sea muy abstracto, más difícil de entender, menos concreto. No diría yo tanto, lo que pasa es que imagino que los alumnos no estarán acostumbrados a manejar pues lo que es los vectores del espacio, los puntos en el espacio, y esta sería un poco la dificultad. Entonces, también es necesario introducir nuevas técnicas, como es la del producto vectorial, para poder llevar a cabo las operaciones y los conceptos aquí implicados.

Y, bueno, pues esto entraña una nueva dificultad, ¿no?, el ver un concepto nuevo que es de tres dimensiones, propiamente dicho. Sí, además, a pesar de que efectivamente son conceptos un poco complicados en una primera lectura, conviene aconsejarles que hagan dibujos representando, pues como ven en cualquier libro de geometría, los ejes de coordenadas en tres dimensiones, y que vayan viendo las propiedades, intuitivamente las propiedades que tienen. Destacaré que, por ejemplo, el producto vectorial, una vez pintados dos vectores en el espacio, pues es un vector perpendicular a dichos dos vectores, o bien al plano que definen estos dos vectores.

Ahí se ve muy bien la anticomutatividad del producto vectorial, siguiendo la ley del sacacorchos o del tornillo que ha citado Víctor, y otra serie de propiedades que yo creo que se pueden acabar viendo geométricamente dibujándolas. Y hay que animar a que estos conceptos los estudien de una forma muy ilustrativa y muy dibujando, cada uno de ellos, hasta que lo entiendan bien. Además, en este curso de acceso, no se pretende que el alumno ni se da, ni en el libro aparece una gran cantidad de conceptos teóricos, simplemente las definiciones necesarias, imprescindibles, y una buena cantidad de ejemplos a continuación para ilustrarlas, y luego muchos ejercicios de aplicación.

Entonces, cuando hemos dicho operaciones con vectores, más que lo importante no es que el alumno recuerde una lista de memoria de operaciones, sino que cada uno de ellos, cuando les surja la necesidad de hacer una operación con vectores, la pueda realizar sin ningún problema, y para ello lo mejor es hacer muchos ejercicios. Pues vamos a pasar al tema 16, geometría analítica del plano. ¿Qué son los puntos del plano? Bueno, pues son lo que intuitivamente parecen ser, es decir, que es una abstracción de lo que ya se manejaba en la geometría, digamos, no analítica, sino en la geometría en general, que se puede ver desde que uno es pequeño, ¿no?, desde bachillerato, etc.

Entonces, aquí lo que se da es una abstracción de hecho, ¿no? Y esta abstracción viene dada, pues, por un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, de modo que nos permiten representar estos puntos del plano, pues mediante un par ordenado de coordenadas, que son la abscisa y la ordenada, la x y la y , como generalmente se les viene designando. ¿Y con respecto a las rectas en el plano? Bueno, entonces surge aquí efectivamente una de las primeras figuras importantes para estudio en el plano, que es la recta del plano. Bueno, pues se podría decir que si tenemos un punto y un vector diferente de cero, entonces por ese punto va a pasar una recta cuya dirección va a ser la que da ese vector.

De modo que los puntos de esa recta, pues serían, digamos, los trasladados mediante ese punto inicial, pues de los vectores proporcionales al dado, ¿verdad? O sea, que viene dada una recta, pues, por un punto y una dirección fundamentalmente, ¿no? ¿Y en cuanto a las ecuaciones de una recta en el plano? Bueno, pues esto sería también lo importante. Para trabajar con rectas en el plano, pues tenemos unas ecuaciones. Entonces aparecen dos tipos de ecuaciones.

Las paramétricas, que como su nombre indica, pues hacen depender de un parámetro las coordenadas de los puntos de la recta, y las ecuaciones implícitas, que son bastante sencillas porque son de la forma, pues, $ax + by + c$ igual a cero. Es decir, una ecuación lineal de las coordenadas x e y con un término independiente. Y manejando estas ecuaciones podemos resolver muchos problemas de geometría.

Por ejemplo, pues, ver dónde se encuentran dos rectas, simplemente se reduce a resolver el sistema de las dos ecuaciones dadas por estas rectas. ¿Hay algún otro ejemplo que pudiera ilustrar más? Sí, por ejemplo, el de perpendicularidad de dos rectas. Además, aquí tiene un

papel importante el producto escalar de dos vectores.

No lo habíamos dicho en el tema 13, pero el producto escalar de dos vectores es cero justo cuando los vectores son perpendiculares. Por lo tanto, también si utilizamos la representación punto vector, o sea, las paramétricas, pues la pura condición de que los dos vectores representantes de cada recta sean perpendiculares es que su producto escalar sea cero. Otro de los puntos que toca este tema es el de las posiciones relativas de dos rectas en el plano.

Bien, en el plano, pues, se pueden dar distintas posiciones relativas. Una de ellas sería la de dos rectas paralelas. Otra, pues, sería que las dos rectas coincidan.

Y finalmente, pues, tendríamos la de dos rectas secantes, que son aquellas que se cortan en un punto. Entonces, en este punto, lo que se trata es de aplicar el teorema de Rouchet, que ya se ha visto en algún tema anterior, al sistema formado por las ecuaciones de las rectas. Y entonces, a partir de ese teorema, es decir, a partir de los rangos de las dos matrices que aparecen ahí en el sistema, pues se determina cuáles son las posiciones de estas rectas.

El último punto de este tema es el de los problemas métricos en el plano. Sí, aquí el alumno, pues, fundamentalmente tiene que aprender a calcular distancias entre dos puntos del plano, distancia de un punto de una recta, calcular el ángulo de dos rectas. Entonces, bueno, pues existen unas fórmulas en el apartado que se obtienen razonadamente y que dan estas distancias o estos ángulos, respectivamente.

Y lo único comentar aquí que se pueden poner problemas, bueno, pues, una gran cantidad de problemas y problemas muy bonitos, ¿no? Por ejemplo, problemas con triángulos, etcétera, etcétera, ¿no? O sea, que hay muchos problemas de geometría y que se pueden, pues, resolver con ayuda de estas fórmulas, ¿no? Hemos dicho hoy que íbamos a ver los temas que van del 13 al 17, ambos incluidos. Pero el tema 17 no es objeto de examen. Sin embargo, es un tema también importante.

Primero quisiera saber por qué no es objeto de examen y luego qué es lo que tiene que hacer el alumno con este tema. Respecto a por qué no es objeto de examen, el equipo docente actual que lleva esta asignatura, así lo ha considerado. Y, de hecho, supongo que los alumnos no se van a molestar por ello.

De todas formas, es un tema interesante y supone una generalización del tema que Víctor Fernández acaba de comentar. Es decir, se trata otra vez de ver rectas en el espacio, porque ahora en el espacio, por decirlo intuitivamente, hay más sitio que en el plano, con lo cual, además de la perpendicularidad, la incidencia y el paralelismo, las rectas pueden cruzarse, pueden no tener ningún punto común ni ser paralelas. Y esto de origen también, además de distancia de puntos a rectas, distancia entre rectas.

Por lo tanto, es conveniente que este tema se lea, se estudie, aunque no sea objeto de examen, tiene su importancia y, además, amplía y complementa los demás temas que hemos visto.

Efectivamente, además de dar una intuición clara de la geometría del espacio. Y también quería apuntar aquí que aparece una nueva figura, que es la de los planos en el espacio.

Por esto también aumenta un poco su complicación, como decíamos antes cuando se hablaba de los vectores en el espacio, pero que, indudablemente, tiene mucho interés el hacer el estudio, y aunque no sea objeto de examen. En cualquier caso, el alumno que siga después una licenciatura de Ciencias o Ingeniería, o en general que tenga asignatura de Matemáticas en primero, tendrá casi seguro álgebra lineal, y ahí gran parte de la asignatura va a ser estos temas que estamos viendo. Yo quisiera, para acabar el programa en estos últimos minutos que nos quedan, preguntar cómo debe el alumno estudiar estos temas.

Son temas, además, los que no maneja los números de una manera igual que otros, entonces quizá tenga algunas dificultades especiales. ¿Cómo debe el alumno prepararse los temas? Bueno, yo creo que, como ha comentado antes Ernesto, lo fundamental, y es el nivel que se pide, es realizar muchos ejercicios. Además, estos temas dan muchísimo contenido a los temas anteriormente estudiados, concretamente al Teorema de Arruchefro de Benios.

Y mediante este teorema podrá hacer los estudios necesarios de la localización o situación de distintos entes, como rectas en el plano, o bien rectas y planos en el espacio, aunque esto puede leérselo, aunque no se le va a exigir. Pero hay que destacar la enorme relación que hay entre el álgebra lineal que antes han estudiado y la geometría que venimos comentando. De hecho, una y otra han estado estrechamente ligadas en su desarrollo.

El consejo fundamental es que haga muchísimos ejercicios, que entienda bien los conceptos, y con respecto a la geometría del espacio, aunque no sea motivo de examen, sí nos queda animar al alumno a que se lo estudie, porque en cuanto tenga que hacer alguna licenciatura o diplomatura tendrá que verse con estos objetos y es bueno ya que lo vaya entendiendo. Vamos a ver temas muy diferentes en los siguientes programas. Cambiamos totalmente.

Por lo tanto, estos conceptos deben quedar ya muy claros, ¿verdad? Efectivamente, porque ya prácticamente se pasa a los temas propiamente de análisis matemático. Entonces, con esto se completa la parte de geometría. Además, esta parte de geometría analítica y vectores también, claro, pues que es muy importante, muy importante.

Simplemente, además de lo que ha dicho José Leandro de María respecto de hacer muchos ejercicios, también, y supongo que en los programas anteriores se habrá insistido en ello, que el alumno vaya cogiendo la necesidad de escribir las cosas bien, rigurosamente, con notación matemática. Aquí, como es un nivel todavía muy elemental, no necesita ni grande desarrollo ni se le piden demostraciones, pero sí que las definiciones y lo que vaya escribiendo al manejar los diferentes objetos matemáticos, los escriba con rigor y se va acostumbrando a ello. Pues debemos ya despedirnos.

Muchas gracias, Ernesto Martínez, Víctor Fernández y José Leandro de María. Buenas noches y hasta un próximo programa. Muchas gracias.

Buenas noches. Esta noche en nuestro programa hemos hablado de matemáticas especiales con los comentarios a los temas del 13 al 17. El curso de acceso se despide hasta mañana.

Gracias por su compañía. Que pasen una buena noche. La UNED les ha acompañado con dos horas y media de radio educativa y cultural.

Mañana estaremos de nuevo con todos ustedes a nuestra hora habitual, ocho y media de la tarde, siete y media en la Comunidad Canaria. Nuestro primer espacio será Revista de Economía. Continuaremos con Foro Político y Sociológico.

Después, Revista de Filosofía y, por último, el curso de acceso. Gracias por su compañía. Muy buenas noches.