

... Matemáticas básicas, el número racional. Emisión número 20. ... Ya conocemos el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros. Para terminar, vamos a tratar de construir el conjunto de los números racionales. Queremos plantear la aparición de los números racionales de forma semejante a como realizamos la de los números enteros. Entonces dijimos que estos números aparecían como consecuencia de no poder realizar ciertas operaciones con los números naturales.

En esta ocasión apreciamos que el nacimiento de los números racionales resulta de la ampliación del campo de los números enteros. Si les parece como ya hemos hecho en otras ocasiones, vamos a recordar el planteamiento efectuado en el caso de los números enteros. Sí, habíamos dicho que al realizar ciertas sustracciones o diferencias con números naturales, no obteníamos otro número natural. Así nace la necesidad de ampliar el campo de los números naturales. Habíamos quedado en representar por pares ordenados de elementos estas operaciones. Por tanto, los elementos del conjunto de los números enteros son pares ordenados de números naturales. O de otra manera, son elementos del conjunto producto del conjunto de los números naturales por sí mismo. Muy bien. También interesa resaltar o recordar... ¿Cómo se explica matemáticamente todo esto?

¿Usted lo recuerda? Sí. Consideramos el conjunto producto del conjunto de los números naturales por sí mismo. En este conjunto, sus elementos son pares ordenados de elementos. Definimos entonces una relación de equivalencia de la siguiente manera. Dos pares ordenados son equivalentes cuando la diferencia entre su primera componente y la segunda es la misma. De esta manera hemos clasificado todos los pares ordenados de números naturales en clases de equivalencia. Cada una de estas clases de equivalencia representa a un número entero. Los elementos del conjunto cociente obtenido con esta relación de equivalencia forman el conjunto de los números enteros. De acuerdo. Vamos ahora a presentar la necesidad de utilizar los números racionales. El cociente es un número que se puede utilizar para hacer un número de números. Si el cociente es un número de dos números enteros, no siempre se puede expresar por otro número entero.

Solamente es factible hacerlo así cuando es un cociente exacto. Podemos ver algunos ejemplos para ilustrar esta idea. 16 dividido entre 8 es igual a 2. 2 es un número entero. Menos 32 dividido por 2 o dividido entre 2 es igual a menos 16. Menos 16 es un número entero. Si ahora consideramos el cociente 7 dividido entre 2, no lo podemos realizar porque no existe ningún número entero que al multiplicarlo por 2 nos dé exactamente 7. Este cociente no lo podemos realizar en el campo de los números enteros. Estamos ante una situación semejante a la presentada con los números naturales. Entonces, en vez de ser el cociente,

Así es, ya lo hemos anunciado al comenzar esta emisión. Podemos convenir en dejar indicada la operación cuando el cociente no pueda ser realizado. Para que estas operaciones indicadas tengan significado, necesitamos ampliar el conjunto de los números enteros. Entonces también podemos representar estas operaciones indicadas como hicimos con los números naturales, por pares ordenados de elementos. Exactamente. Vamos a utilizar este procedimiento. Podemos representar cualquier cociente de números enteros como una pareja ordenada de números enteros en donde el primer elemento de esta pareja sea el dividendo y el segundo miembro el divisor. Se ha tomado por costumbre utilizar una representación algo distinta. Colocar el dividendo, numerador, encima del número de números enteros.

divisor, denominador, y separados por una línea horizontal. Esta representación se llama habitualmente fracción. Imaginamos que esta representación es conocida por todos nuestros alumnos oyentes. Aquí también se nos presenta el caso de que muchas fracciones pueden representar el mismo cociente. En efecto, también tenemos este problema y lo vamos a resolver de la misma manera que en otras ocasiones. Pero antes de analizar esta circunstancia, podemos considerar algunos ejemplos. Así, las fracciones 1 medio, 2 cuartos, 3 sextos, 10 veinteavos, 7 catorceavos, etcétera, representan a un mismo cociente. ¿Pueden ustedes poner otro ejemplo? Sí, sí, es fácil. Podemos considerar las fracciones 3 cuartos, 6 octavos, 7 cuartos, 7 cuartos, 7 cuartos, 7 cuartos, 7 cuartos, 7 cuartos, 7 cuartos, 7 cuartos, 8 octavos, 9 doceavos,

12 dieciséisavos Todas ellas implican el mismo cociente Bueno, el mismo cociente no a los ejemplos que yo puse antes Sino el mismo cociente entre sí Tres cuartos, seis octavos, nueve doceavos Representan el mismo cociente Se me ocurre pensar en las fracciones cuyo denominador es cero 0 sea, aquellos cocientes cuyo divisor es cero Quiero decir que, por ejemplo, dos partido por cero Siete partido por cero No significan nada Al menos yo no entiendo su significado Claro, para nosotros van a suponer una excepción Las fracciones utilizadas para representar el cociente de dos números enteros Tienen que tener el denominador o divisor distinto de cero Con esta restricción, todas las fracciones utilizadas tienen sentido Independientemente de esta restricción o excepción Las fracciones pueden ser consideradas como un par de números enteros ordenados Bueno, ¿qué es lo que se puede hacer? Bueno, yo prefiero decirlo con algo más

de precisión. Las fracciones son un par de números enteros ordenados. Al primero le llamamos numerador y al segundo denominador. El numerador puede ser cualquier número entero, mientras que el denominador, como acabamos de decir hace un momento, es cualquier número entero distinto de cero. Bueno, esta puede ser una diferencia con respecto a los pares ordenados de números naturales formados al estudiar los números enteros. En aquella ocasión no existía ninguna restricción al formar las parejas o pares ordenados. Es en efecto una diferencia con el caso que planteamos en la emisión anterior, pero no quita generalidad al problema que estamos estudiando. Como consecuencia de todo lo visto, podemos afirmar que una fracción puede considerarse como un elemento del conjunto de números naturales. El conjunto producto de los números enteros por el conjunto de números naturales.

Entonces, a partir del conjunto de los números enteros, hemos obtenido las fracciones como pares ordenados de números enteros, siendo el segundo de ellos no nulo. Muy bien, muy bien, distinto de cero. Tenemos ya un problema resuelto, el de la construcción de las fracciones. Pero, de acuerdo con lo visto, tenemos enseguida otro problema que resolver, fácil de imaginar. ¿Cómo clasificar estas fracciones? Bueno, para clasificar los elementos de un conjunto, es necesario definir en él una relación de equivalencia. Muy bien. Ya hemos visto con algunos ejemplos anteriores que existen varias fracciones que representan al mismo cociente. Podemos decir que dos fracciones son equivalentes si el producto del numerador de la primera fracción, por el denominador de la segunda fracción,

segunda es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Un ejemplo aclarará esta definición. Las fracciones 3 quintos y 9 quinceavos son equivalentes. En efecto, 3 numerador de la primera por 15 denominador de la segunda es igual a 45. Obtenemos este mismo resultado al

multiplicar 5 denominador de la primera por 9 numerador de la segunda. Es igual también a 45. En ambos casos. Hemos obtenido el mismo resultado. Luego, $\frac{3}{5}$ y $\frac{9}{15}$ son fracciones equivalentes. Yo creo que en este caso cada una...

de las clases de equivalencia obtenida tienen infinitos elementos. Sí, sí, es correcto lo que usted dice. Esto significa que dada una fracción hay infinitas fracciones equivalentes a la dada. Además, el número de clases de equivalencia también es infinito. Señorita, ¿qué significa cada una de las clases de equivalencia? Cada una de las clases de equivalencia engendra un número racional. También se puede decir que cada clase de equivalencia representa algo común. Lo que representa es el número racional. Muy bien. Hemos llegado al concepto de número racional como representante de cada una de las clases de equivalencia obtenidas con la relación de equivalencia antes definida. Pero, ¿cuál es el conjunto de los números racionales, señorita? El conjunto de los números racionales es el conjunto de las clases de equivalencia.

conjunto cociente obtenido según la relación de equivalencia. O sea, los elementos de este conjunto cociente son las clases de equivalencia de las que antes hablábamos. Efectivamente, el conjunto de los números racionales es el conjunto cociente obtenido según la relación de equivalencia. Los elementos de este conjunto cociente son las clases de equivalencia de las que hemos hablado repetidamente. Bueno, pues ya terminamos la emisión radiofónica de hoy. Pero antes me parece adecuado insistir en el proceso de construcción de los números racionales. Hay que entender esto bien porque supone un gran logro desde el punto de vista matemático, que por otra parte no es complicado, pues sólo supone la utilización de conceptos ya manejados repetidas veces por nuestros alumnos. Volvemos a decir lo mismo que cuando estudiamos los números enteros. Nos hemos

preocupado del concepto, pero no de la operatoria. Pues pensamos que, además de no ser adecuada para un programa radiofónico, es un tema en el que los alumnos generalmente no tienen dificultades. ¡Gracias!