

AC 15 18

Matemáticas especiales, concepto de derivada, guión número 27, fecha de emisión 21 de mayo del 80. Vamos a introducir hoy un concepto muy importante del cálculo que nos ayudará a resolver múltiples problemas. Es el concepto de derivada de una función en un punto.

A lo largo de esta emisión veremos que dicho concepto está ligado íntimamente con la tangente a la curva en el punto en que se considera la derivada. Profesor, no sabemos qué es la tangente. Ah, claro, no conocen ustedes la definición de recta tangente a una curva.

Bien, daremos una idea intuitiva solamente. Supongamos que tenemos una función. Su gráfica será una cierta curva.

Una recta que tiene un punto de contacto con dicha curva se llama recta tangente a la misma en ese punto. Es decir, una recta tangente a una curva en un punto es una recta que toca a la curva en ese punto. Muy bien.

Aunque no lo podemos tomar como una definición, porque exactamente no es lo que hemos dicho, creo que han captado la idea de recta tangente a una curva en un punto. Sí, desde luego, ahora entiendo lo que es una tangente. Estupendo.

Y ya que hemos visto la idea de recta tangente, voy a dar ahora la de recta secante. Una recta es secante a una curva si la recta corta a esta en algún punto. Por ejemplo, en la figura 12 de la apoyatura, la recta S es una recta secante a la curva.

La recta S es secante porque corta a la curva en dos puntos. Exactamente. Y ya podemos pasar a ver el concepto de derivada.

Observen la figura del apartado 11. En ella tenemos la gráfica de una función f . Consideremos el punto A , f de A . Si a la abscisa de dicho punto se le suma cierto valor h , se obtiene el punto A más h , f de A más h . Formamos ahora dos diferencias. La diferencia entre los originales y la diferencia entre las imágenes.

¿Qué valores obtenemos? La diferencia entre los originales de los dos puntos es h . Y la diferencia entre las imágenes es f de A más h menos f de A . Muy bien. Podemos escribir el cociente entre esas dos diferencias. Es decir, f de A más h menos f de A partido por h . Observen que si A es un número fijo y h un número real cualquiera, ese cociente es una función que depende de h . Es decir, ahora la variable independiente es h . Pues bien, al límite, cuando h tiende a cero de dicho cociente, se llama derivada de la función f en el punto A . Es decir, la derivada es un límite, ¿no? Eso es.

Y, por tanto, como sabemos que no siempre existe el límite de una función en un punto, no siempre existe derivada de una función en un punto. Por lo que veo en la figura 11, la derivada de la función en A se nombra casi igual que al valor de la función en el punto A . Bueno, para

designar la derivada de una función se utilizan varias notaciones. En la que nosotros utilizamos ocurre lo que usted ha dicho.

Solo se diferencian en una coma. La derivada se lee f' de A. Me parece que ya tenemos el concepto de derivada. Veamos atentamente ahora la figura del apartado 12.

Como pueden observar, tenemos una recta S que es secante a la curva que determina la función f . Los dos puntos de corte son A, f de A , y $A + h, f$ de $A + h$. Con estos dos puntos de corte se tienen las coordenadas del vector dirección de dicha recta. Como recordarán, solo tenemos que restar las coordenadas de los puntos. Es decir, el vector dirección de la recta S es el vector de coordenadas h, f de $A + h$ menos f de A . Me parece que con este vector tenemos definida la dirección de esa recta y la de todas las paralelas, ¿no? Eso es, y puedo ahora definir otra idea nueva que introducimos hoy.

El cociente entre la segunda coordenada y la primera coordenada del vector dirección se llama pendiente de dicha recta. Este número que se obtiene al dividir la segunda coordenada entre la primera nos define también la dirección de la recta. Entonces es lo mismo dar las coordenadas del vector dirección de una recta que la pendiente de dicha recta, ¿no? Exactamente.

De las dos formas se da la dirección de la recta. Entonces la pendiente de la recta S de nuestra figura será f de $A + h$ partido por h . Muy bien, esa es la pendiente de la recta secante. Volvamos a la figura 12.

Tenemos la recta S . Si se hace h cada vez más pequeño, tendremos las otras rectas señaladas que también son secantes a la curva. Cuando h se haga cero, la recta secante se transforma en tangente. Y el límite de la pendiente cuando h tiende a cero es precisamente la pendiente de la recta tangente.

Es decir, que si tenemos la pendiente de la recta secante, al tender h hacia cero se convierte en la pendiente de la recta tangente. Yo no he entendido bien, pues lo que hemos hecho al hallar el límite, cuando h tiende a cero de f de $A + h$ menos f de A partido por h , es hallar la derivada de f en el punto A . Debo de estar confundida. No está confundida.

Ese es exactamente el resultado que obtenemos mediante esta interpretación. Es el siguiente. La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Repito. La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. Ahora lo veo claro.

Las dos cosas son la misma. Como dije antes, no siempre existe derivada, ya que no siempre existe el límite. Puede ocurrir que no exista el límite, pero sí los límites laterales.

Ello nos lleva a definir la derivada por la derecha y por la izquierda, que están definidas en el apartado 13. Todo lo que hemos hecho para un punto A, f de A , fijo, se puede realizar para un

punto cualquiera x , f de x . Se obtiene así la función derivada. Es decir, a partir de una función se obtiene otra función, que es la derivada de la primera, ¿no? Exactamente.

Dada una función f en los puntos en los cuales exista el límite definido anteriormente, se puede hallar la derivada. Se forma entonces una nueva función que se llama derivada de f , y se designa con f' habitualmente. Una vez obtenida la función derivada de f , para calcular la derivada en un punto A , basta sustituir en f' x por A . Pero entonces, cada vez que tengamos que hallar la derivada de una función f , habrá que hallar un límite.

Bueno, la definición de derivada se hace mediante límites. Ahora bien, hay unas reglas que nos facilitan el cálculo. Por ejemplo, se demuestra que la derivada de una función constante es cero.

También que la derivada de una suma de dos funciones es la suma de las derivadas de las dos funciones. Asimismo, tenemos reglas para la derivada del producto cociente de dos funciones, para la composición de funciones, o para la función inversa. Todos estos mecanismos nos van a permitir calcular derivadas sin tener que recurrir a los límites.

Por supuesto, para demostrar estas reglas, sí hemos tenido que utilizar la definición de derivada, y por lo tanto, límites. Cuando una función tiene derivada en un punto A , se dice que es derivable en dicho punto. Y para terminar esta breve introducción al importante tema de la derivada, voy a enunciar un teorema también importante.

Si una función es derivable en un punto A , necesariamente es continua en dicho punto. O sea, que son equivalentes los conceptos de continuidad y derivada en un punto A . No, lo único que he afirmado antes es que si una función tiene derivada en un punto A , entonces es continua en dicho punto. Sin embargo, no toda función que es continua en un punto A , admite derivada en ese punto.

Es decir, hay funciones continuas que, sin embargo, no admiten derivada. Este es un resultado muy interesante y que puede ser de mucha utilidad. En cualquier libro de texto encontrarán su demostración.

A continuación, en el apartado 14, tienen ustedes un cuadro de las derivadas de las funciones más corrientes. Mediante la realización de ejercicios llegarán a conocerlas perfectamente. ¿Y es necesario aprenderse de memoria el cuadro? Sí, pero no es tan difícil como les parece a ustedes a primera vista.

Pueden relacionar varias derivadas y además utilizar el cuadro hasta que vayan adquiriendo su altura. No deben olvidar que este tema es muy importante.