

AC 15 53

Hola, buenas noches. Comenzamos este espacio dirigido a los alumnos del curso de acceso a la universidad para mayores de 25 años, el CAT. Como cada día de lunes a viernes y hasta las 11 de la noche, esperamos compartir este tiempo de radio para todos aquellos que tengan que superar el acceso a nuestra universidad, así como para los interesados en la variedad de temas que cada día tratamos.

Veinticuatro son las asignaturas que conforman el curso y cinco las que cada alumno debe preparar según la carrera que posteriormente vaya a cursar. Todas están incluidas en nuestra programación. Consulten para saber el día y hora de emisión la guía de medios audiovisuales.

Estamos también interesados en contar con sus sugerencias. Si desean hacernos las llegar, pueden dirigirse por carta a UNED, curso de acceso, departamento de radio, pabellón de gobierno, Ciudad Universitaria Sin Número, 28040 de Madrid. Recordar asimismo a los alumnos del curso de acceso que en las fonotecas de los centros asociados se encuentran las emisiones de radio de cursos pasados en cintas de casete y que están a su disposición.

En la guía de medios hay un amplio catálogo con los diferentes temas que se han venido tratando a lo largo de estos últimos años en cada asignatura. Muchas de ellas las pueden ser de utilidad porque amplían y complementan las emisiones de este curso. Siguen este consejo y hagan uso de todos los materiales que la UNED pone a su disposición.

Seguro que les será muy útil. Otro de los medios de comunicación e información con los que cuenta el alumno es el llamado Boletín Interno de Coordinación Informativa, el BICI. En este boletín que aparece semanalmente se encuentra todo tipo de información académica, así como avisos y comunicaciones de los profesores.

Recuerden que el BICI está a su disposición en el centro asociado. En el programa de esta noche Matemáticas Especiales nos acompaña el profesor Antonio Costa que nos comentará la quinta unidad didáctica. Esta noche en Matemáticas Especiales nos acompaña el profesor Antonio Costa.

Buenas noches. Vamos a hablar de la unidad didáctica número 5. En esta unidad didáctica nos comenta los límites, las funciones continuas, las funciones derivables y también las aplicaciones de las derivadas. Podemos empezar con los límites.

¿Qué es un límite? Bueno, deben recordar que ya vimos en otra unidad didáctica anterior la definición de límite de una sucesión. En este caso lo que se trata son límites de funciones. Antes de hablar de límites diría que un concepto muy importante es el concepto de función.

Como se va a hablar de límites de funciones, pues es necesario primero saber bien lo que es una función. Una función es algo como un instrumento que da para ciertos valores, por ejemplo vamos a poner la función temperatura de una sala, pues para un valor determinado

del tiempo nos dice cuál es la temperatura de la sala, o sea que eso es una función. Entonces a partir de ese concepto pues se puede definir cuál es el concepto de límite, que es como si dijéramos un valor al cual se aproxima cuando hacemos la variable aproximarse a otro.

¿Nos podrías poner un ejemplo? Por ejemplo, podemos decir que el valor de la temperatura cuando el tiempo se aproxima a las 5 de la mañana pues son cero grados. Entonces bueno pues eso es el concepto de límite, es ese valor al cual se puede aproximar la función cuando hacemos tender o hacemos aproximarse la variable a otro. También este tema 1 nos habla del álgebra de límites.

Bueno sí, entonces el concepto de límite es un concepto difícil y difícil de formular. Ya verán ustedes en el texto base pues que tiene una serie de connotaciones teóricas y de formalismos que también ocurría en el caso de las sucesiones, pues esto de que para todo ϵ exista un δ y bueno pues que son cosas muy formales pero realmente la idea es la que les he dicho antes, con este ejemplo de la temperatura. Después hay otra cosa que es el cálculo de los límites.

El cálculo de los límites es algo mucho más algebraico, es más una técnica y eso es lo que realmente pues tienen ustedes que hacer bien. Entonces tienen que hacer ejercicios y una de las cosas es lo del álgebra de límites. ¿Qué quiere decir esto? Bueno pues cuando uno tiene varias funciones y sabe calcular ya los límites de esas funciones pues después puede hacer operaciones algebraicas con esas funciones.

Por ejemplo puede sumarlas, puede multiplicarlas, puede multiplicarlas por un número. Entonces lo que ocurre es que al hacer el paso al límite pues los límites también quedan operados de la misma forma. Es decir que si uno hace la suma de dos funciones pues obtiene que el límite de esa suma es la suma de los límites.

Esto es lo del álgebra de los límites. Y algo que llama la atención, esto de límites infinitos y límites en el infinito, ¿qué diferencia hay? Bueno, límites infinitos yo creo que son todos. Realmente es una tendencia infinita.

Uno se aproxima infinitamente o infinitesimalmente. Límites en el infinito lo que quiere decir es cuando la variable se hace tan grande como se quiera. Entonces bueno pues eso es lo que tiene el límite infinito.

En realidad esto de límites infinitos querían decir con esta nomenclatura que la función pudiera hacerse también tan grande como quiera. Es decir que lo que puede ocurrir es que por ejemplo cuando la variable tiende a un cierto valor pues la función toma un valor tan grande como se quiera. Pasamos al segundo tema que nos habla de funciones continuas.

Ya hemos hablado de lo que es una función pero ¿qué es una función continua? Bueno pues una función continua para hablar o para decirlo en términos entendibles pues es una función que uno puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. Entonces bueno pues la

continuidad lo que expresa es ese hecho de que uno no tiene que hacer un salto al describir esa gráfica. Y en cuanto al álgebra de funciones continuas también se trata... Pues es algo parecido al caso de los límites.

Cuando uno tiene dos funciones que son continuas y realiza la suma pues lo que ocurre es que la suma de esas dos funciones vuelva a ser una función continua. También nos habla este tema del teorema de Bolzano y el teorema de los valores intermedios. ¿Qué es el teorema de Bolzano? Bueno pues el teorema de Bolzano es algo que realmente casi salta la vista.

Si una función pues por ejemplo si la temperatura de esta sala en un momento dado es de 7 grados y tres horas más tarde es de menos 3 grados pues entre esas dos horas en ese intervalo horario hay algún momento en el que la temperatura de la sala ha sido de 0 grados. Pues este es el teorema de Bolzano. Quiere decir que si una función toma valores por una parte negativos y por otra positivos pues hay algún momento en el cual esa función se anula.

El teorema de los valores intermedios pues lo único que dice es que bueno pues en vez de ya solamente en el cero pues es fijarse pues si es entre dos valores dados. Es decir que si la función toma un cierto valor en un extremo otro valor en otro pues toma todos los que están intermedios entre los dos. ¿Tienen que fijarse en los alumnos en alguna otra cosa de esta lección? No yo diría que incluso estos teoremas de Bolzano y el teorema de los valores intermedios pues ya están dentro del límite de lo necesario.

Realmente pues ya incluso la demostración es sencilla pero bueno pues quizá ya no se les va a exigir. Lo que sí que interesa que tengan claro es lo que quiere decir que es una función continua y más que nada que sepan reconocerla. Es decir que si les proponemos que estudien la continuidad de una cierta función pues sepan cuáles son los pasos que tienen que seguir para ver si es continua o no.

Y en cuanto al tema 3 nos habla de funciones derivables. Bueno pues este es un paso más. La derivada de una función pues nace también de un problema geométrico.

En realidad pues se trata de estudiar cuál es la pendiente o sea cómo de inclinada está la tangente o sea la recta tangente a una función. Entonces bueno pues si la función está muy inclinada por así decir crece muy deprisa o menos inclinada pues la tangente será más o menos grande. Entonces esto es la idea de derivada.

Lo que ocurre es que para calcular las derivadas pues hay como unas reglas, como una forma de calcularlo, un algoritmo. Entonces lo que tienen que saber es muy bien calcular derivadas. Entonces esto es una cuestión parecida al caso pues de la multiplicación o de la suma.

Tienen que saber sumar o tienen que saber multiplicar pues en este caso tienen que saber derivadas. Entonces o derivar. Tienen que aprender como una especie de tabla.

Hay una tabla de derivación en la cual bueno pues aparecen las funciones derivables más importantes y lo que tienen que hacer es ejercitarse sobre ellas. Se trata entonces de hacer

ejercicios sobre todo. Muchos ejercicios y sobre todo de conocer esas derivadas de esas funciones.

Quizá este es el momento. Luego hay dos tipos de funciones que son importantes desde muchos puntos de vista porque aparecen en muchas aplicaciones o que son tradicionalmente muy usadas en matemáticas que son las funciones trigonométricas y la función logarítmica. En nuestro temario pues estas funciones aparecen al final.

Sin embargo pues recomiendo que sea ahora el momento de comenzar con ellas. Cuando se vean las funciones continuas y las derivables es conveniente. Es conveniente empezar con ellas porque dan lugar a un ejemplo pues muy socorrido y no solamente ya las funciones polinómicas o los cocientes de polinomios sino que ya tienen también estas otras funciones y en realidad también se les va a exigir que sepan derivar estas funciones.

Aunque el tema de derivadas pues aparezca aquí, las funciones trigonométricas y logarítmica pues aparezcan casi al final del texto pues si uno no ve las funciones trigonométricas, la función seno, la función coseno pues realmente aunque está muy al final pues se les va a exigir con respecto a saber derivar. Entonces a lo mejor puede saber derivar pero por no haber visto esas funciones no poder hacer los ejercicios. ¿Tiene el alumno que saber la diferencia entre derivadas de la función compuesta, derivada de la función inversa y derivadas sucesivas? Sí, bueno, claro.

Por supuesto el alumno tiene... Estas son como las reglas del juego o de cómo hacer las cosas, cómo multiplicar. Entonces bueno pues además de saber la tabla pues tiene que saber cómo en el caso de que tenga una función que está compuesta por otras muchas funciones pues qué es lo que hay que hacer para poder aplicar la tabla que nos dice la derivada de las funciones más sencillas. Entonces eso es lo que nos da la derivada de la función compuesta o lo que se llama la regla de la cadena.

Después con la derivada de la función inversa pues lo que podrá saber es si sabe ya la función o la derivada de una función pues hallar la función de la derivada de la función inversa y bueno pues derivadas sucesivas pues es saber que se puede con la derivada pues obtiene una nueva función que es la función derivada. Bueno pero esa función se puede volver a derivar y dar lugar a la derivada segunda y así sucesivamente. Bueno pues es simplemente eso.

En tema 4 si nos habla de aplicaciones de estas derivadas, qué podemos decir, cómo se pueden aplicar? De la misma definición de derivada como la pendiente de esta recta tangente pues nos dice que bueno pues si la derivada es positiva pues la función tiene que crecer porque eso quiere decir que la pendiente pues es positiva. Bueno y si es negativa pues tiene que decrecer. Entonces como se ve el estudio de la derivada o el conocimiento de la derivada puede dar también cierta información importante sobre cómo es la función.

Entonces eso es lo que tienen que saber en este caso. Entonces bueno pues tienen que saber cómo utilizar la derivada no solamente para saber si es creciente o decreciente o para hallar

también los máximos y los mínimos sino para hacer un estudio completo de la función. Un ejercicio también muy socorrido pues ya viendo con caras luego a la prueba final pues es el estudio de una función.

¿Y por qué? Pues porque en principio cuando se les exige que estudien una función o que la representen gráficamente pues tienen primero que tener muy claro pues lo que es una función. Después tener que estudiar su continuidad o saber si es discontinua o es continua. Después también tienen que saber derivarla para poderla representar gráficamente para saber si es creciente, si es decreciente, cuáles son sus máximos, cuáles son sus mínimos.

Entonces es una cosa que tienen que saber hacer y bueno para ello tienen que derivar entonces también tienen que conocer la lección anterior. Por lo tanto con el estudio de una función casi se estudian los cuatro temas. Exactamente y es una forma primero también muy útil para nosotros para poder evaluar los conocimientos del alumno porque este es digamos toda esta unidad didáctica es un tema o es una unidad muy central.

Es decir es algo que van a tener lo que utilizar prácticamente estudian lo que estudian. Entonces bueno pues es muy importante que lo conozcan muy bien. De lo que el alumno ha visto hasta ahora en las unidades didácticas anteriores ¿qué es lo que le puede ser práctico para este tema, para esta unidad didáctica? Bueno pues repasen sobre todo los temas de polinomios y el tema de límites de sucesiones.

Realmente pues el límite de una sucesión es una buena primera aproximación para el concepto del límite de una función. Entonces bueno pues están son conceptos muy próximos. Siguiendo con este tema 4 nos encontramos con el teorema de Rolle y de Cauchy.

¿Son importantes también? Sí son importantes pero quizá pues tampoco es el momento de estudiarlos con profundidad. El alumno sí que debe leerlos, debe conocerlos. Bueno pues debe conocer cuál es enunciado pues por ejemplo el teorema de Rolle.

Pero no necesita estudiarse la demostración ni entrar en más profundidades porque realmente eso no se le va a exigir. Pero sepa cómo aplicarlo realmente. O sea qué es lo que quiere decir y le ha enunciado.

¿Y los máximos y mínimos relativos? Bueno pues máximos y mínimos relativos pues son los que vienen dados por la derivada, por los valores en los que se anula la primera derivada. Entonces bueno pues esto tiene sentido cuando se habla en contraposición con los máximos y mínimos absolutos. Entonces bueno pues un máximo o un mínimo absoluto pues es un máximo o un mínimo de toda la función en su conjunto.

Mientras que el máximo y mínimo relativo pues o local pues es lo que ocurre con la función en las proximidades de un cierto valor. También este tema nos habla de concavidad y convexidad. Sí también tienen que conocer otra aplicación más de la derivada.

En este caso pues ya tienen que irse no solamente a la derivada primera sino a la derivada

segunda. Y también bueno pues este es otro de los temas que tienen que conocer en el momento en que representen una gráfica o representen una función. Entonces esto también tienen que conocerlo y tienen que saber cómo hacerlo en el caso de que se les dé un ejemplo concreto.

Antes ya se ha dicho que es importante conocer ya los logaritmos, las funciones trigonométricas en temas anteriores. ¿También en este tema tiene aplicación? Sí por supuesto claro. Cuando estábamos hablando también de funciones derivables, de funciones continuas, decíamos que era el momento de introducir las funciones trigonométricas.

Pero también aquí es importante porque realmente los ejemplos que se pueden poner y que pueden ilustrar mejor o pueden dar una idea mejor al profesor de cuál es el conocimiento del alumno pues pueden implicar que vayan funciones trigonométricas o funciones logarítmicas o exponenciales introducidas dentro o compuestas con otras funciones. Así de ese modo pues ya digo además de evaluar al alumno sobre una parte pues le estamos evaluando de una forma más global. Además estas funciones tanto las trigonométricas como las logarítmicas y exponenciales pues aparecen con mucha frecuencia en muchas áreas y con muchas aplicaciones.

¿Nos podrías explicar qué es la regla del hospital y qué aplicaciones tiene? Bueno la regla del hospital es otra aplicación más del cálculo de derivadas y sirve para calcular límites de cocientes de funciones. Entonces bueno pues aquí lo que habíamos visto antes de límites de funciones pues vuelve otra vez de nuevo y obtenemos cómo el cálculo de derivadas puede aplicarse a un tema anterior. Entonces esto también lo tienen que conocer y tienen que saber cómo se hace.

Realmente bueno pues es simplemente aplicar pues la derivada en el caso de un cociente pues derivar el numerador, derivar el denominador y hacer de nuevo el cociente. Pero realmente al hacer esas derivadas lo que ocurre es que las funciones pues se hacen más sencillas. ¿Qué importancia tiene este tema número 5, la unidad didáctica número 5? Bueno pues yo diría que es muy importante.

Quizá pues de todo lo que se ha visto pues es la unidad más importante en conjunto pues con el tema de sistemas de ecuaciones. Entonces bueno pues además esto pues se refleja en la prueba del final, en el examen y entonces es casi seguro que alguna o varias de las preguntas van a ceñirse a esta unidad didáctica. Por lo tanto tienen que saber muy bien derivar muy bien el concepto de una función y de continuidad y después aplicar también las derivadas para estudio de funciones.

¿Y cuál sería el mejor método para estudiar esta unidad tema por tema? ¿Aprender primero el concepto? En fin ¿cuál es el mejor método? En primer lugar aprender el concepto, o sea leer muy claramente las definiciones y los enunciados de las proposiciones y después hacer muchos ejercicios. Yo diría pues que en el caso de representación gráfica pues toda aquella función que caiga en sus manos intentarla representar gráficamente utilizando los métodos que han aprendido. Sobre todo ejercitarse a hacer funciones derivadas constantemente.

Exactamente, además según van avanzando lo que ocurre es que tienen que ir aplicando cuestiones que han visto antes, por lo tanto yo diría que vayan avanzando y cuando lleguen al tema 4 pues van a tener que aplicar todo en conjunto, van a tener que aplicar lo que han aprendido sobre funciones continuas, lo que han aprendido sobre funciones derivables y bueno pues les hará un repaso en conjunto de todo ello. Es un tema por tanto que aparte de lo que se aprenda en él mismo en esta unidad didáctica tienen que aplicar unidades didácticas anteriores? No, yo creo que es un poco independiente de otras unidades, bueno en el caso por ejemplo de los polinomios pues si se habla de polinomios, de funciones polinómicas o de cocientes de polinomios pero en realidad es una temática un poco diferente. Pues con la importancia que tiene recomendar que se pongan ya a hacer ejercicios.

Efectivamente. Y que lean también la unidad didáctica número 6 que veremos más adelante pero que es conveniente que la vean previamente. Sí, lo que ocurre es que tal y como están introducidas las funciones tanto logaritmo, exponencial y trigonométricas en el texto base pues es imposible porque realmente están introducidas mediante integrales.

Si todavía no saben el concepto integral pues no van a poder introducirlas pero en este momento yo sí que les recomendaría pues que fueran a otros textos que fueran pues algún texto de boop o de coo y allí vieran cómo bueno pues se introduce normalmente pues las funciones trigonométricas pues que vienen de ahí de resolución de triángulos y la función logaritmo y exponencial. Pues recordar que es muy importante esta unidad didáctica número 5 y nos veremos en el próximo programa. Muchas gracias.

Antes de despedir nuestro programa de matemáticas especiales daremos unas normas generales que pueden ser muy útiles para el estudio de esta asignatura. Para estudiar matemáticas debe utilizarse constantemente un cuaderno donde se vayan tomando anotaciones de lo que se va leyendo y en general de todas las ideas que van surgiendo durante el estudio. Una o muchas lecturas de los textos sin detenerse a expresar por escrito las ideas principales es en gran medida un trabajo perdido.

Para estudiar las definiciones y enunciados de proposiciones el método apropiado puede ser leer despacio cada una de las palabras y símbolos de la definición o enunciado intentando comprender su significado. Realizar después una lectura completa de la definición o enunciado tratando de entenderlos en su conjunto. Analizar los rasgos esenciales del contenido de las lecturas anteriores.

Es conveniente también buscar ejemplos particulares de aplicación de cada nuevo concepto antes de pasar a los siguientes. Para estudiar las demostraciones de proposiciones y teoremas es conveniente tener en cuenta que el estudio sólo memorístico es inútil en matemáticas y es extremadamente perjudicial cuando se abordan demostraciones. Al ir estudiando un tema es conveniente hacer paralelamente una ficha resumen con los conceptos y propiedades más importantes.

Es interesante que esta ficha no sea una mera copia sino que el alumno haga una elaboración

propia del tema y se exprese en un lenguaje lo más matemático posible según la destreza adquirida. Es imprescindible realizar los ejercicios de los libros que maneje el alumno. Una vez acabado el tema es importante también repasarlo en profundidad reteniendo los puntos fundamentales del mismo.

Recomendamos a los alumnos que no se desanimen ante las dificultades que en esta asignatura son algunas. Sin embargo precisamente para ayudar a superar estas dificultades están los profesores tutores de los centros asociados y los profesores de la sede central. Por tanto todas las dudas que vayan surgiendo en el estudio deben consultarse con el tutor del centro asociado o con los profesores de la sede central, bien sea por escrito, personalmente o por teléfono.

Ya debemos despedir nuestro programa y nos despedimos hasta mañana. Gracias por su atención y muy buenas noches. La UNED les ha ofrecido dos horas y media de radio educativa.

Mañana volveremos a nuestra hora habitual 8 y media de la noche 7 y media en la Comunidad Canaria con Revista de Derecho. Continuaremos con el informativo semanal de la UNED y para acabar el curso de acceso. Gracias por su atención y feliz descanso.