

... Matemáticas complementarias. Lógica y matemática. Emisión 42. ... Como ya anunciábamos al comenzar esta serie de emisiones radiofónicas, teníamos la intención de tratar muchos temas. Unos relacionados directamente con los temas explicados en las unidades didácticas y otros cuyo interés radica en la aportación humanístico-científica. ... Hoy nuestros alumnos oyentes nos van a permitir que hablemos de las interacciones entre las matemáticas y la lógica. Digamos, las primeras...

interacciones cuando la lógica no era todavía una ciencia. Actualmente la lógica se puede considerar como una ciencia de la que se puede deducir toda la teoría de conjuntos que todos nuestros alumnos conocen. ¿Cómo se ha llegado a crear esta ciencia? A lo mejor después de unos minutos tenemos una idea más clara. Escuchemos. El espíritu crítico que caracterizó a los matemáticos del siglo XIX orientó sus investigaciones hacia los fundamentos de la ciencia que cultivaban, sobre todo a partir de la creación de las geometrías noeuclídeas, en que se vio que muchas de las nociones básicas no eran más que juegos de palabras, tras de las cuales se ocultaban peticiones de principio que era necesario eliminar, si se quería hacer de la matemática, una fortaleza inestable

inexpugnable desde el punto de vista lógico. Analistas y geómetras se prepararon para la faena y PASCH en Alemania y PEANO en Italia iniciaron, a la distancia de media docena de años, la axiomatización de la geometría y de la aritmética respectivamente, construyendo estas disciplinas sobre la base de axiomas o postulados, palabras absolutamente sinónimas hoy a las que no se imponen más que dos condiciones, compatibilidad e independencia. Es decir, que no tengan contradicciones lógicas internas y que ninguno de ellos sea corolario de los demás. A PASCH y a PEANO siguió una larga serie de investigadores quienes completaron y confeccionaron la obra empezada y aunque hubo y hay las inevitables y convenientes diferencias de matiz en la manera de enfocar las nociones fundamentales, otros estuvieron en el mismo lugar.

y están de acuerdo en considerar estas nociones como primitivas y, por tanto, indefinibles. Pero mientras unos se inspiran en la intuición para enunciarlas, otros las enuncian como simples palabras con un valor exclusivamente gramatical. Estas dos posiciones corresponden a las dos actitudes que podemos adoptar entre el espacio y el tiempo. Psicológica o lógica. Empírica o idealista. Lo cual ha dado origen a un cisma cuya solución se está buscando actualmente porque todavía no se ha podido poner en claro si la matemática es una rama de la lógica o la lógica necesita de una matemática previa para establecerse. Lo único que podemos afirmar es que la combinatoria de Raimundo Lulio, en la que se inspiran las dos actitudes, no es la única. La última es la de la matemática que inspiró Leibniz para hacer su método universal científico, era un sueño de contornos imprecisos

que empiezan a precisarse, porque cuando la filosofía descubrió que la matemática tenía un aspecto formal que era necesario tener en cuenta, se advirtió que las relaciones entre la lógica y la matemática eran más estrechas de lo que hasta entonces se había creído, y la revisión de los cimientos de ésta obligó a revisar también los de aquella. Cuando a fines del siglo XIX se creía que la creación de Cantor estaba hecha y perfecta, apareció una antinomia debida a Bural y Forti, y ya entrado el siglo XX, Russell presentó otra, y Richard una tercera, que no sólo amenazaron la solidez de la teoría de conjuntos, sino también la de la lógica formal. Estas antinomias se pueden ilustrar con un cuentecillo que tiene muchas variantes, todas las cuales se reducen, en esencia, a la pregunta que hizo un forastero a Sancho Panza cuando éste era gobernador de

la Inglaterra. En el siglo XXI, el rey de la Inglaterra, el rey de la Inglaterra,

Su Quijote relata así. Señor, dijo el forastero, un caudaloso río dividía dos términos del mismo señorío. Y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso. Digo, pues, que sobre este río estaba una fuente, y al cabo de ella una horca, y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma. Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar siempre a dónde y a qué va. Y si jurar es verdad, déjenle pasar.

digere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra sin remisión alguna. Sabida esta ley y la rigurosa condición de ella, pasaban muchos, y luego en lo que juraban se echaba de ver que decían verdad, y los jueces los dejaban pasar libremente. Sucedió pues que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento y dijeron, si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y conforme a la ley debe morir. Y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre. Pídesse a vuestra merced, señor gobernador, ¿qué harán los jueces de tal hombre, que aún hasta ahora están dudados?

dudosos y suspensos. Y habiendo tenido noticia del agudo y elevado entendimiento de Vuesa Mercé, me enviaron a mí a que suplicase a Vuesa Mercé de su parte y diese su parecer en tan intrincado y dudoso caso. Sancho Panza, luego de hacerse repetir el negocio para entenderlo bien, lo planteó correctamente diciendo. El tal hombre jura que va a morir en la horca y si muere en ella, juró verdad. Y por la ley puesta, merece ser libre y que pase la puente. Y si no le ahorcan, juró mentira. Y por la misma ley, merece que le ahorquen. Y aunque según confesión propia...

Sancho tenía más de mostrenco que de agudo. Llegó a la conclusión de que al pasajero le asistía la misma razón para morir que para vivir. Porque si la verdad le salva, la mentira le condena igualmente. Y absolvió al pasajero acordándose de uno de los consejos que le dijera a don Quijote la noche antes de tomar la posesión de la ínsula, que fue que... Cuando la justicia estuviese en duda, se descantase y acogiese a la misericordia. Pues siempre se ha alabado más el hacer bien que mal. Cervantes resolvió el problema con su sentido humano característico. Pero la lógica, que es una ciencia sin temperatura, no lo puede resolver de acuerdo con sus principios. Pues el...

tercero excluido afirma que de dos juicios contradictorios uno es verdadero y otro falso, sin decidir cuál es el verdadero y cuál el falso, porque deja esta decisión al de contradicción, según el cual es imposible que una cosa sea y no sea al mismo tiempo y bajo la misma relación. En la teoría de conjuntos se presentan casos en los que falla el principio de exclusión del tercer término, lo que ha obligado a revisar la lógica formal de Aristóteles. La voz de alarma la dio Bronwer en 1911, denunciando la ilegitimidad de las demostraciones por reducción al absurdo y admitiendo, además de los dos valores clásicos, lo verdadero y lo falso, un tercer valor, el de las proposiciones cuya verdad o falsedad no se puede establecer con los recursos de que disponemos actualmente, de la misma manera que, con arreglo al código penal, un juez no puede condenar.

a un acusado cuya culpabilidad es prueba de inocencia. Para resolver las antinomias de la teoría de conjuntos, el profesor polaco Lukasiewicz inició en el año 1920 la creación de una lógica polivalente, en la cual pierden validez los principios de contradicción y de tercero excluido. Y siguiendo estas nuevas orientaciones, se han propuesto varias soluciones para el problema de los fundamentos de la matemática, desde el punto de vista lógico. Russell opina que las paradojas conjuntistas proceden de un círculo vicioso, para cuya eliminación acepta el axioma siguiente. Lo que presupone la totalidad de un conjunto no puede formar parte de él.

Hilbert establece una nueva teoría para demostrar la ausencia de contradicciones en la matemática. Y Brauner niega a ésta el derecho a operar con el infinito y con los procesos infinitos, sosteniendo que el principio de exclusión del tercer término sólo es aplicable a los conjuntos finitos y bien determinados. Gödel ha llegado recientemente a una conclusión fundamental y ha puesto de manifiesto que es imposible demostrar la ausencia de contradicciones en ninguna teoría formal que comprenda la de los números naturales con ningún medio expresable en términos de dicha teoría. La lógica tiene un valor negativo en cuanto impide comisión de errores en el razonamiento matemático. Pero la matemática ha de buscar sus nociones fundamentales en la cantera del mundo externo, porque la experiencia es la levadura. La levadura de la razón y la matemática son las mismas.

La matemática sin experiencia, como el pan sin levadura, se convierte en una cosa insípida. Y se necesita la fermentación si queremos que la matemática sea algo más que una simple curiosidad de intelectuales ociosos. Cuando se asciende una montaña, dice Klein, se va notando que la pureza de la atmósfera aumenta a cada momento. Pudiera pues creerse que si se asciende indefinidamente, el bienestar que se experimenta será cada vez mayor. Todo el mundo sabe, sin embargo, que esto no ocurre, sino que por el contrario existe un límite de altura pasado el cual la vida humana se hace imposible. Análogamente, puede decirse que en la ascensión de los lógicos hacia la pureza científica, eliminando la intuición, en lo posible, pues aún los símbolos de Peano tienen un resto de la vida, los elementos intuitivos, se encuentran innegables ventajas, pero sólo hasta cierto límite que no puede ser el límite de la pura vida.

...no puede ser sobrepasado sin que el excesivo predominio... ..de la lógica sobre la intuición... ..produzca la esterilidad del razonamiento.