

AC 15 16

Matemáticas Especiales, emisión número 20, el número complejo, autores Joaquín Abejer Monteagudo, José Antonio Fernández Sabater, emisión 3 de abril del 79. En emisiones anteriores, estudiamos los números naturales, enteros, racionales y reales. Veíamos cómo necesitábamos ampliar primeramente los números naturales con los enteros, luego los enteros con los racionales y después los racionales con los reales.

¿Recuerdan qué operaciones no se podían efectuar en cada uno de estos conjuntos de números? Recuerdo que en el conjunto de los números naturales no siempre se podía efectuar la resta. Por esta razón teníamos que ampliarlo y construíamos el conjunto de los números enteros. En este conjunto sí podíamos efectuar siempre la resta, pero no ocurría lo mismo con la división, por lo que necesitábamos ampliar este conjunto y construíamos el de los números racionales.

Yo recuerdo que en el conjunto de los números racionales había ecuaciones que no tenían solución. Así, la ecuación x elevado al cuadrado igual a 2 no tenía solución en este conjunto, pues dicha solución es raíz de 2 y éste no es un número racional. Por esta razón necesitábamos definir el cuerpo de los números reales.

Bien, bien, pero también ocurre que en el cuerpo de los números reales existen ecuaciones que no tienen solución. Ampliando este conjunto obtendremos el conjunto de los números complejos, y en este conjunto tienen solución todas las ecuaciones algebraicas. Entonces, si en el conjunto de los números complejos se pueden realizar todas las operaciones y resolver todas las ecuaciones algebraicas, supongo que no necesitaremos ampliarlo, ¿no? ¿Es cierto? Efectivamente.

Al estudiar los números complejos, acabamos con esta serie de misiones que hemos dedicado a los números. Lo que yo no veo claro es cuáles son las ecuaciones que no tienen solución en el cuerpo de los números reales. ¿Puede ponernos un ejemplo? Sí, claro.

Vamos a considerar el siguiente ejemplo. Sea la ecuación x elevado al cuadrado igual a menos uno. Está claro que esta ecuación no tiene solución dentro del cuerpo de los números reales, pues no existe ningún número real que al elevarlo al cuadrado resulte menos uno.

Todos sabemos que al elevar un número real al cuadrado siempre se obtiene un número positivo, nunca un número negativo. Bueno, creo, creo que lo he entendido. Si despejamos la x en esta ecuación, obtenemos x igual a raíz cuadrada de menos uno.

Y las raíces de números negativos no tienen solución en el cuerpo de los números reales. Exactamente. Diremos que las raíces de índice par de números negativos no tienen solución en el conjunto de los números reales.

Por este motivo necesitamos construir otro conjunto en el que sí tengan solución estas y todas

las ecuaciones algebraicas. Este será el conjunto de los números complejos. Entonces la raíz cuadrada de menos uno es un número complejo.

Efectivamente. Pero antes de aclarar esta cuestión vamos a construir matemáticamente el conjunto de los números complejos. Partimos del conjunto de los números reales y consideramos el producto cartesiano de este conjunto por sí mismo.

Es decir, tenemos el conjunto de pares ordenados de números reales. Recuerdo que este proceso es el mismo que seguíamos para definir los números enteros y los números racionales. ¿En este caso también definiremos una relación de equivalencia? No, no, no.

Para construir los números complejos no es necesario definir ninguna relación de equivalencia. Simplemente consideramos el producto cartesiano del conjunto de los números reales por sí mismo y llamaremos número complejo a un elemento de este conjunto. Es decir, un número complejo es un par ordenado de números reales.

Entonces el conjunto de los números complejos es el conjunto de pares ordenados de números reales. ¿Puede ponernos algún ejemplo de números complejos? Por supuesto. Son números complejos los siguientes pares de números reales.

2 menos 3. Raíz de 3, 0. 1, 2, 5. Menos 2, menos 10. A la primera componente de cada par la llamamos componente real y a la segunda componente imaginaria. Si la segunda componente del par es nula, es decir, cuando los pares sean de la forma $x, 0$, diremos que son números reales.

Y cuando la primera componente del par es nula se llaman números imaginarios puros. Estos serán de la forma $0 y$. Uf, yo no he entendido lo que ha dicho de que si la segunda componente es 0 le llamábamos número real. ¿Me lo puede explicar un poco más? Veamos.

Hemos dicho que a la primera componente del par la llamábamos componente real y a la segunda componente imaginaria. Cuando la componente imaginaria es nula lo que hacemos es identificar el par de números reales a la componente real. Esto es, al número real que representa.

Es decir, al par $x, 0$ le identificamos con el número real x . En este sentido podemos decir que el conjunto de los números reales está incluido en el conjunto de los números complejos. Puesto que identificamos a los números reales con los números complejos que tienen la segunda componente nula. Creo, creo que sí, que ahora sí lo he entendido.

Usted dijo al principio de esta emisión que en el conjunto de los números complejos se podía resolver la ecuación x al cuadrado igual a menos 1. Pero yo no me imagino de qué forma se podría realizar. ¿Nos lo puede explicar? Bien, pero antes quiero aclarar alguna otra cuestión. Al par de números reales $1, 0$ le llamamos unidad real y al par $0, 1$ le denominamos unidad imaginaria.

Dicha unidad imaginaria se representa por la letra latina y y su valor es raíz cuadrada de menos 1. Entonces la raíz cuadrada de menos 1 es un número complejo. Efectivamente es el número complejo y que en forma de par ordenado es el par $0\ 1$. Yo no comprendo bien por qué la raíz cuadrada de menos 1 es un número complejo, puesto que definíamos los números complejos como pares ordenados de números reales. Es cierto que hemos definido los números complejos como pares ordenados de números reales, pero estos pares los podemos representar de otras formas diferentes en las que no profundizaremos en esta emisión.

Una de estas formas es la llamada forma binomial, en la que interviene el número y . Es decir, la raíz cuadrada de menos 1, que llamamos y , es un número complejo que, puesto en forma de par ordenado, coincide con el par $0\ 1$. Según esto, la solución de la ecuación x al cuadrado igual a menos 1 sería el par $0\ 1$. Sería el número complejo y que coincide efectivamente con el par $0\ 1$. A mí se me ocurre una pregunta. ¿Entonces el número raíz cuadrada de menos 3 también es un número complejo? Sí, es otro número complejo, puesto que raíz cuadrada de menos 3 es lo mismo que raíz cuadrada de 3 multiplicado por raíz cuadrada de menos 1. Por lo tanto, será igual a raíz cuadrada de 3 por y . Y a este número, ¿a qué par ordenado de números reales correspondería? El número complejo raíz cuadrada de 3 por y , puesto en forma de par ordenado, sería el par 0 raíz cuadrada de 3. Yo creo que sería conveniente que hiciéramos un repaso de todo lo que hemos visto en esta emisión radiofónica. Bien, en esta emisión hemos tratado únicamente de explicar la necesidad que existe de construir el conjunto de los números complejos y después dar una definición de los mismos.

¿Me podrían decir ustedes por qué razón necesitábamos ampliar el conjunto de los números reales? Pues no sé, quizá porque en el conjunto de los números reales había ecuaciones que no tenían solución, como era la ecuación x al cuadrado igual a menos 1. Bien, ¿y cómo definíamos un número complejo? Pues un número complejo es un par ordenado de números reales. A la primera componente la llamábamos componente real y a la segunda componente imaginaria. Bien, cuando la segunda componente de un par es nula decíamos que era un número real y cuando era nula la primera componente al número le llamábamos imaginario puro.

También recuerdo que al par $1\ 0$ le llamábamos unidad real y al par $0\ 1$ unidad imaginaria. A esta la representábamos con la letra latina i y su valor es raíz cuadrada de menos 1. Bien, para terminar quiero decir que si en el conjunto de los números complejos definimos las operaciones suma y producto, análogamente a cuando estudiábamos los otros conjuntos de números tendrá una estructura algebraica. ¿Recuerdan qué estructura algebraica tenían los números reales? Sí, creo que tenían estructura algebraica de cuerpo conmutativo.

Muy bien, entonces como el conjunto de los números complejos lo hemos obtenido a partir de los números reales, se verificarán en él todas las propiedades que cumplían los números reales. Por lo tanto el conjunto de los números complejos con las operaciones suma y producto tiene estructura de cuerpo conmutativo.