

AC 15 27

Matemáticas especiales, guión número 4, autor Paloma Pantoja Beloki, fecha de emisión 29 de octubre de 1980. En la emisión de hoy vamos a preocuparnos de estudiar un concepto nuevo. Trataremos de dar forma matemática a una circunstancia que se plantea con cierta frecuencia en la vida real.

Hay infinidad de situaciones en las que resulta conveniente definir un conjunto a partir de otros dos, en vez de enumerar por extensión todos sus elementos. Puede ser que estemos habituados a utilizar todos los días este tipo de conjuntos, pero no veo claro lo que se persigue tratando de sacar un solo conjunto de otros dos. ¿No podría ponernos un ejemplo para aclarar lo que ha dicho? Desde luego.

Verán cómo en la vida cotidiana se producen situaciones en las que la utilización de dos conjuntos nos permite definir determinadas características de otro. Vayamos pues a un caso muy concreto. Si en un cine las butacas de los espectadores se enumeran correlativamente desde la primera hasta la última, sería incómodo para el espectador que adquiere una localidad saber si ésta responde a sus deseos, así como encontrar después su asiento en la sala.

Realmente estamos acostumbrados a otro sistema. Cuando adquirimos la localidad obtenemos un lugar determinado en la sala al darnos dos números. El primero que corresponde a la fila y el segundo que indica el número que la butaca toma en esa fila.

Esta es la circunstancia que quiero analizar. Las localidades numeradas designan en general el asiento que hemos de ocupar por dos números, el de la fila y el que la butaca toma en ella. De este modo se evita la incomodidad apuntada.

Estoy de acuerdo en que este sistema es cómodo y sencillo, pero no veo qué relación tiene con lo que dijo antes de obtener un conjunto a partir de otros dos. Pues yo creo que veo tres conjuntos distintos en este ejemplo. Las butacas del cine, la enumeración de las filas y las butacas que hay en cada fila.

Efectivamente, aunque el tercer conjunto que ha indicado es mejor denotarlo por un conjunto de números igual al de las butacas que tiene cada fila. En esencia lo que se hace al numerar las localidades de un cine de esta manera equivale a asignar a cada butaca del conjunto de butacas un elemento de un nuevo conjunto de pares de números. El primer número de cada par de ese conjunto es el que indica la fila y el segundo el lugar que ocupa la butaca en ella.

Entonces una entrada de la fila 7 y butaca 13 representa al par 7 13. Muy bien, ese es un elemento del conjunto de todos los pares posibles. Ahora bien, considerando los mismos números 7 y 13, el par 13 7 corresponde a la misma butaca? El par 13 7 indica la fila 13 y asiento 7. Luego el par 13 7 es distinto del 7 13, pues indican butacas diferentes.

Muy bien, se han dado cuenta de una característica de los pares. Dentro de un par el orden es

esencial. Para tener bien definido un par tenemos que indicar el orden de los elementos que lo componen.

Creo que ya entiendo perfectamente la idea. Con los elementos de dos conjuntos distintos hemos caracterizado los elementos de otro. Eso es.

Matemáticamente se traduce en la siguiente definición de lo que denominaremos conjunto producto o conjunto producto cartesiano. Dados dos conjuntos A y B , al nuevo conjunto formado por todos los pares cuya primera componente pertenezca al conjunto A y la segunda pertenezca al conjunto B se llama producto cartesiano de A y B . Entonces el conjunto producto cartesiano de A y B está formado por pares ordenados de elementos. Claro.

Quiero insistir en la diferencia que existe entre un par $A B$ de dicho conjunto cartesiano y el conjunto formado por A y B . El conjunto está formado por dos elementos sin presuponer nada sobre el orden en que son citados dichos elementos, mientras que cuando nos referimos a un par ordenado pretendemos enunciar dos elementos en un orden determinado y solamente en ese orden. Creo que está suficientemente claro el producto cartesiano de dos conjuntos. Vamos ahora a restringir el caso anterior.

Consideraremos el producto cartesiano de un conjunto por sí mismo. Para aclarar esta idea vamos a empezar con un ejemplo. Sea el conjunto de todas las letras del abecedario castellano.

Formemos el producto cartesiano de este conjunto por sí mismo. ¿Cuáles son los elementos de este conjunto? Los elementos de ese conjunto serán pares de letras del alfabeto. Por ejemplo, el par DF es un elemento de dicho producto cartesiano.

Bien. En lo sucesivo vamos a limitarnos al producto cartesiano de un conjunto por sí mismo. Vamos a construir ahora algún subconjunto de este producto cartesiano.

Por ejemplo, el subconjunto de pares de letras de modo que, al formar la sílaba entre ellas, tenga significado en castellano. Por ejemplo, el par SI pertenece a este subconjunto, pues forma la palabra sí. Lo mismo ocurre con los pares E, L, N, O, I, F, A , que forman las palabras él, no y fa.

¿Este subconjunto se podría expresar de alguna otra forma? En efecto, lo que hemos hecho ha sido formar pares de letras que cumplen determinada propiedad. En definitiva, esto es lo que llamamos relación binaria entre los elementos de un conjunto. Así, la E está relacionada con la L porque verifican la propiedad impuesta, es decir, forman la palabra él.

¿Pueden decir algún elemento del producto cartesiano que no cumpla esta relación? Por ejemplo, el par DX , puesto que la palabra DX no significa nada en castellano. ¿Podría poner otro ejemplo para entenderlo mejor? Por ejemplo, en el mismo conjunto de partida consideramos el subconjunto de los pares de vocales. La relación entre los elementos de este subconjunto es la de ser vocales.

Matemáticamente se expresaría de la siguiente manera. Siendo A el conjunto de las letras del abecedario, diremos que dos elementos de A están relacionados entre sí si ambos son vocales. El conjunto B de los pares así obtenidos evidentemente será un subconjunto del producto cartesiano de A por sí mismo.

Como en el ejemplo anterior, podemos siempre afirmar si un elemento cualquiera del producto cartesiano, un par ordenado cualquiera, cumple o no esta relación binaria. ¿El par AB la cumple? No, pues B no es una vocal. ¿Puede decirme entonces qué elementos del conjunto A de las letras del alfabeto están relacionados con la letra A mediante esta relación? A está relacionada con todas las vocales, incluida ella misma, lo que nos daría cinco pares.

El par AA , el par AE , el par AI , el par AO y el par AU . Me gustaría insistir en la idea de par ordenado. El par AI es distinto del par IA , pues ambos son elementos distintos del producto cartesiano.

Entonces, aunque ambos pares son distintos, si un par pertenece al subconjunto definido por una relación binaria, siempre pertenecerá el par formado por los mismos elementos cambiados de orden. No necesariamente. Si recuerdan el primer subconjunto que hemos establecido antes, o sea, los pares de letras de modo que al formar la sílaba tenga significado, no cumple lo que acaba de decir.

Pues si bien SI forma sílaba y, por tanto, cumplen la relación, el par IS , que también pertenece al producto cartesiano, no cumple la relación. Luego, no pertenecen al subconjunto. Esto lo podemos expresar diciendo que S está relacionado con I , pero I no está relacionado con S . ¿Podría ponernos otro ejemplo de lo que acaba de explicar? Por supuesto.

Consideremos el conjunto de las personas que viven en Cádiz. Vamos a establecer una relación binaria entre los elementos de ese conjunto. Diremos que una persona de Cádiz está relacionada con otra persona de Cádiz si la primera tiene más edad que la segunda.

Por ejemplo, Juan tiene 27 años y María 35. Evidentemente, el par María-Juan pertenece a la relación, pues María tiene más edad que Juan. En cambio, el par Juan-María no cumple la relación.

Como ven, no siempre que el par AB pertenece a un subconjunto definido por una relación binaria tiene que pertenecer al par BA . Creo que ya entiendo lo que significa par ordenado. Entonces, para terminar este estudio de las relaciones binarias, demos una caracterización matemática de la misma.

Diremos que en un conjunto A establecemos una relación binaria si construimos cualquier subconjunto del producto cartesiano de A por A . Quede bien claro que todo subconjunto del producto cartesiano es relación binaria y que los elementos de dicho subconjunto son pares ordenados. Si no lo he entendido mal, el número de relaciones binarias que se pueden establecer en un conjunto con muchos elementos es tan grande que no veo la utilidad que

pueden tener. Por supuesto, no todas las relaciones serán importantes en matemáticas.

Sólo tendrán interés aquellas que cumplan determinadas propiedades, propiedades que nos reduce el número de relaciones binarias de interés. ¿Podría indicarnos algunas de esas propiedades? Claro que sí. Esto es lo que nos interesa ahora mismo.

Primeramente, trataremos de la propiedad que llamaremos reflexiva. Una relación binaria establecida en un conjunto cumple la propiedad reflexiva si todo elemento del conjunto está relacionado consigo mismo. Entonces, en el conjunto de las letras del alfabeto y con la relación binaria donde una letra está relacionada con otras y ambas son vocales, se verifica la propiedad reflexiva, porque toda vocal está relacionada consigo misma.

Y pertenecen, por tanto, a la relación los pares a, a, e, e, i, i, etcétera. ¿Hay alguna relación binaria que no cumple esta propiedad? A mí me parece que la verifican todas. No todas las relaciones binarias cumplen la propiedad reflexiva.

Sigamos con el conjunto de las personas que viven en Cádiz y defino ahora la siguiente relación binaria. Una persona de Cádiz está relacionada con otra de Cádiz si la primera es padre de la segunda. Ciertamente, en esta relación no se verifica la propiedad reflexiva, pues ninguna persona es padre de sí misma.

Luego, ningún elemento está relacionado consigo mismo. Hay otras propiedades que también son muy importantes, la propiedad simétrica, la antisimétrica y la transitiva. Hoy, por falta de tiempo, no nos detendremos en su enunciado.

Recomiendo que estudien el significado de las mismas para que puedan comprender mejor las próximas emisiones.