

AC 10 101

Hola, buenas noches, bienvenidos al tiempo del curso de acceso. En nuestro programa esta noche, matemáticas básicas. Nos acompaña el profesor Eduardo Ramos.

Con él veremos las lecciones segunda y tercera, los números racionales y las ecuaciones. Esta noche en nuestro programa de matemáticas básicas, vamos a comentar los capítulos segundo y tercero del libro de texto. Nos acompaña el profesor Eduardo Ramos.

Muy buenas noches, Eduardo. Buenas noches, Isabel, y buenas noches en un programa más a todos nuestros estudiantes del curso de acceso en esta asignatura de matemáticas básicas. Hasta ahora hemos hablado de los números naturales y enteros.

Seguimos hablando de números. Con estos números, con los naturales y los enteros, no es posible resolver muchas cuestiones. Por lo tanto, la primera pregunta que se plantea es, ¿qué es lo que resuelve un número racional? Sí, hoy nos toca hablar de números racionales.

Si recordamos lo que hemos estudiado en el capítulo anterior, referente a los números, que es la parte esta del curso que estamos trabajando, vimos cómo el hombre sintió la necesidad de crear el número natural y aprendió pronto, además de sistematizar su representación en los sistemas de numeración, a hacer operaciones con ellos, a hacer sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Vimos también en la lección anterior que algunas de estas operaciones se podían hacer con cualquier par de números naturales, como podían ser la suma y la multiplicación, que la resta no era posible en todos los casos, lo que lo obligó al hombre a descubrir o a inventar los números enteros, y dejamos pendiente una cuestión, que fue cómo hacer la división de dos números enteros o dos números naturales cualesquiera. Para centrar las ideas, consideremos, por ejemplo, el número 12 y el número 4. 12 se puede dividir por 4 y el resultado es el número natural 3, es decir, 4 es un divisor de 12, 12 es un múltiplo de 4 o 12 es divisible por 4. Esta operación puede hacerse dentro de los números naturales.

Pero si consideramos los números 12 y 5, vemos que no es posible hallar un resultado exacto en el campo de los números naturales, es decir, no hay ningún número natural que multiplicado por 5 dé exactamente 12. Si queremos repartir 12 litros de leche entre 5 personas, podemos intentar dar a 2 y vemos que nos van a sobrar 2 litros de leche, porque gastaremos 10 litros en darle 2 a cada una de las personas. Si intentamos dar a 3, veremos que estaremos escasos, porque necesitaremos 15 litros y no tenemos más que 12.

Por lo tanto, el resultado de dividir 12 entre 5 es un número que ha de estar comprendido entre 2 y 3, parece estar comprendido entre 2 y 3, pero no hay ningún número natural, como sabemos, que esté en el medio entre 2 y 3. ¿Cómo puede resolverse este problema? Una pequeña reflexión nos conduce a una solución bastante intuitiva y simple. Lo primero que hay que llamar la atención es en lo arbitrario de la unidad de medida. Estamos hablando de litros, de, por ejemplo, botellas de litro.

No podemos dar botellas enteras de litro a 5 personas si tenemos 12 botellas. Pero si discutimos, podemos vaciar las botellas en vasos más pequeños, digamos de 200 centímetros cúbicos, de forma que una botella pueda vaciarse exactamente en 5 vasos. En este momento tendríamos 60 vasos, 12 litros, cada uno de los cuales puede vaciarse en 5 vasos.

Y ahora tenemos 60 vasos que si ya es posible dar a 5 personas un número exacto de vasos de leche. Le podemos dar 12 vasos de leche a cada una de las 5 personas. Entonces, ¿qué hemos hecho con esta argucia? Hemos reinventado o reconsiderado o redefinido una unidad de medida.

En lugar de hablar del litro, hablamos del vaso, que es un quinto de litro. Aparecen así unos nuevos números que resultan de considerar las subdivisiones de la unidad de medida en fracciones más pequeñas. A estos números que resuelven el problema de la división exacta de los números enteros o de los números naturales, se le denominan números racionales.

Bien, pues ya sabemos qué es un número racional y qué tipo de cuestiones resuelve. Pero, ¿cómo se representa? La forma clásica de representar un número racional es mediante dos números enteros separados por una raya, mediante lo que se conoce como un quebrado. El número de abajo se llama denominador.

El número que está debajo de la raya se llama denominador porque denomina la unidad fraccionaria que estamos empleando. Y el número de arriba se llama numerador porque numera cuántas unidades fraccionarias se toman. Entonces, esa es la representación más clásica de un número fraccionario, aunque, como veremos después, hay otras posibles representaciones.

Aquí, sin embargo, surge una pequeña ambigüedad o una pequeña equivalencia, por decirlo con más precisión. Mientras que, para representar un número entero o un número natural, teníamos una única manera de hacerlo. Por ejemplo, el 3 lo representábamos con el símbolo 3 y el 5 con el símbolo 5. Para representar un número fraccionario o un quebrado, tenemos diferentes maneras de hacer la representación.

Por ejemplo, si tomamos 3 partes de una unidad dividida en 5 partes, tenemos el número 3 quintos. Pero, evidentemente, la cantidad que tenemos es la misma que si tomamos 6 partes de una unidad dividida en 10 partes. Es decir, si multiplicamos los dos elementos de la fracción, el numerador y el denominador, por el mismo número, el 3 quintos, lo multiplicamos el numerador por 2 y el denominador también por 2, obtenemos 6 décimos.

Las dos fracciones representan, evidentemente, la misma cantidad. Entonces, tenemos varias formas equivalentes de representar una misma cantidad mediante un quebrado o una fracción. Una de las formas fáciles y sencillas de ver si dos fracciones son equivalentes es comprobar que el producto del numerador de una por el denominador de la otra iguale al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

¿Qué operaciones se pueden hacer con las fracciones o quebrados? Una vez introducidos los números racionales, las operaciones que se pueden hacer con ellos son, lógicamente, las mismas que pudiéramos hacer con los números naturales y enteros. Es decir, la suma, la resta, la multiplicación y la división. ¿Pero cómo se suma? Bien, para sumar números racionales tenemos que vigilar el denominador.

Está claro que si dos fracciones tienen el mismo denominador, su suma es bastante intuitiva. Por ejemplo, si queremos sumar tres cuartas partes de la unidad más cinco cuartas partes de la unidad, el resultado obvio es sumar los numeradores. Ocho cuartas partes de la unidad, esa es la suma de manera evidente e intuitiva.

Se suman los numeradores y se divide por el denominador común. Y cuando las fracciones no tienen el mismo denominador, pues se recurre al truco de buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan las dos el mismo denominador. Esto es siempre posible porque, por ejemplo, tomando el mínimo común múltiplo de los denominadores u otro múltiplo común de los denominadores, ya podremos encontrar fracciones equivalentes a las dadas, lógicamente cambiando los numeradores o multiplicando convenientemente los numeradores para que las fracciones resultantes tengan las dos el mismo denominador.

Y se puede aplicar la lógica que razonamos antes, sumar los numeradores y dividir por el denominador común. ¿Y la resta? La resta es exactamente igual que la suma, lo que pasa es que en vez de sumar los numeradores tendremos que restar los numeradores. Bien entendido que primero, si es necesario, hay que reducir las fracciones a denominador común.

¿Y en cuanto a la multiplicación? La multiplicación de fracciones la vamos a razonar con dos pasos previos. Primero consideramos cómo se multiplica una fracción por un número entero. Por ejemplo, la fracción tres séptimos por el número entero seis.

Eso, intuitivamente, consiste en sumar seis veces la fracción tres séptimos. Como tiene el mismo denominador siete, el resultado será sumar el numerador tres seis veces. O lo que es lo mismo, multiplicar tres por seis, dieciocho, y dividir por siete.

El resultado es dieciocho séptimos. Entonces, para multiplicar una fracción por un número entero, se multiplica el numerador por el número entero y se divide por el denominador. ¿Para dividir? Pues entonces el razonamiento es bastante similar.

Por ejemplo, consideremos la posibilidad de dividir la fracción tres séptimos por un número entero, por ejemplo, el cinco. Esto consiste, intuitivamente, en hacer lo siguiente. Dividimos la unidad primero en siete partes, tomamos tres, y estas tres las dividimos, a su vez, en cinco partes.

Es lo que estamos haciendo con esa división. Claro que esto es lo mismo de considerar la unidad dividida en treinta y cinco partes, siete por cinco, y tomar solamente tres. Entonces, para dividir una fracción por un número entero, lo que hay que hacer es multiplicar el

denominador por ese número entero y dejar el numerador que tenía.

El resultado de dividir la fracción tres séptimos por cinco es la fracción tres dividido por treinta y cinco. Y finalmente, el tercer paso que podemos ya razonar para multiplicar una fracción por otra, pues podemos considerarlo como la hilazón de los dos pasos anteriores. Primero multiplicamos por un número, el numerador, y luego dividimos por otro número, el denominador.

De forma que, para multiplicar la fracción tres séptimos por la fracción seis quintos, es lo mismo que multiplicar la fracción tres séptimos por seis, y el resultado dividirlo por un número entero, cinco. Si hacemos un pequeño cálculo, evidente de lo que hemos dicho, resulta que el resultado de multiplicar la fracción tres séptimos por seis quintos es lo mismo que multiplicar los numeradores, seis por tres, dieciocho, y dividir por el producto de los denominadores, siete por cinco, treinta y cinco. ¿Y por último, la división? Bueno, la división es la multiplicación de una fracción por la inversa de la que se quiere dividir.

¿Qué es la fracción inversa o recíproca? Es una fracción de una dada, es otra fracción tal que el producto por la dada es el número entero uno. Es decir, si consideramos una fracción, por ejemplo, A partido por B, su fracción recíproca es B partido por A, que con la regla que acabamos de decir, resulta que al multiplicar A partido por B por B partido por A, da en el numerador A por B, en el denominador B por A, es decir, da uno. Pues para dividir una fracción A partido por B entre otra fracción C partido por D, se opera de la siguiente manera.

Se multiplica el numerador de la primera por el denominador de la segunda y se divide por el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Y con estas operaciones podemos ya acabar las operaciones aritméticas básicas en los números fraccionarios. Salvo una pequeña cuestión que no hemos dicho hasta ahora y que hay que tener presente.

No se puede dividir por cero, ninguna fracción puede tener denominador cero. Eso es así porque el producto por cero no está definido. Antes hemos comentado que hay otras formas de representar un número racional que no son las fracciones.

Sí, otra manera de representar una fracción es mediante lo que se llama su expresión decimal. Si recordamos lo que decíamos cuando hablábamos de sistemas de numeración, veíamos que, por ejemplo, el número 23 significa 2 veces 10 más 3 veces 1, 2 decenas más 1 unidad. Considerábamos los múltiplos de la unidad de 10 en 10, es decir, las decenas, las centenas, etc.

De manera similar, se pueden considerar unos divisores de la unidad que son la décima parte de la unidad, la centésima parte de la unidad, la milésima parte de la unidad, con el sentido intuitivo. Una décima parte de una unidad es aquella cantidad tal que 10 de ellas hacen una unidad, que se pueden también simbolizar por potencias de 10. Al igual que la decena es 10 elevado a 1 y la centena es 10 elevado a 2, el producto de 10 por 10 es la centena, podemos considerar la décima, que es 1 dividido por 10.

Podemos considerar la centésima, 1 dividido por 100. De esta forma, un número fraccionario puede también representarse mediante potencias de 10, tanto con exponentes positivos como con exponentes negativos. Por ejemplo, el número fraccionario 17 partido por 25, que equivale al número fraccionario 68 partido por 100, mediante multiplicar el numerador y el denominador por 4, puede representarse de esta manera.

68 partido por 100 se puede considerar como 60 partido por 100 más 8 partido por 100. Pero 60 partido por 100 se puede considerar como 6 partido por 10. Entonces, 68 partido por 100 se puede considerar como 6 partido por 10 más 8 partido por 100.

Es decir, 6 décimas más 8 centésimas. Esta es la forma decimal de expresar un número fraccionario. Y es bastante fácil encontrar la manera, aunque requiere una pequeña práctica y una pequeña experiencia.

Recomiendo, entonces, repasar detenidamente el punto 2.3 de las unidades didácticas, en donde se explica con cierto detalle y con bastantes ejemplos cómo se puede pasar una fracción que está escrita en forma de quebrado, numerador y denominador a su expresión decimal y al revés. Cómo se puede, dado una expresión decimal, encontrar un quebrado que represente a ese número decimal. ¿Otra manera de definir una fracción es mediante porcentajes o tantos porcientos? Sí, los porcentajes están bastante introducidos en la vida cotidiana.

No es, ni más ni menos, que una forma de referirse a los números quebrados como estamos hablando en esta lección. Por ejemplo, hablamos del 60%. Pues el 60% no es más que una forma de referirse a la fracción 60 dividido por 100.

Al número quebrado, 60 dividido con denominador y 100 de denominador. En general, un porcentaje $c\%$ equivale a la fracción c partido por 100. Esto es bastante familiar en la vida corriente y no tiene especial dificultad, una vez comprendido que son los números racionales.

Bien, podemos pasar al capítulo 3. Este capítulo es muy importante, las ecuaciones. En las ecuaciones se comprueba la importancia de los cálculos con expresiones literales. Es decir, los cálculos donde algunas letras sustituyen a los números.

¿Pero qué tipo de problema resuelven las ecuaciones? Sí, aunque no hemos acabado todavía de hablar de números en esta parte del curso, porque nos quedará en una próxima lección estudiar los números reales, sí es el momento de introducir algo que se pueda hacer con los números que llevamos estudiados hasta este momento, números naturales, números enteros y números fraccionarios, que son las ecuaciones. Además de sumar, restar, multiplicar y dividir, además de operar con ellos, muchas veces en la vida normal, en la vida cotidiana, se nos plantean las cuestiones que hacen referencia a averiguar un número, encontrar un número que verifica una determinada condición. Es decir, además de sumar, restar y multiplicar números, algo que se pueda hacer con los números es encontrar aquellos que verifican una determinada regla o una determinada condición.

Por ejemplo, si sabemos que una cuenta produce un 12% de interés al año, puede interesar saber, queremos averiguar, qué cantidad de dinero tendríamos que meter en la cuenta para producir unos intereses de 90.000 pesetas. Este tipo de problema se nos plantea con cierta frecuencia en la vida cotidiana. La cantidad esa desconocida, la cantidad que hay que introducir en la cuenta para producir unos intereses de 90.000 pesetas cuando la cuenta renta un 12% anual, esa cantidad desconocida es un número que tratamos de averiguar cuál es.

Pero al no saberlo empezamos llamándole X o incógnita, que tendremos que averiguar, que tendremos que despejar. Y una vez designada con X a esa cantidad desconocida, a esa incógnita, que sabemos es un número y como tal se comportará, es decir, podremos sumar, multiplicar, dividirlo por otros números, podemos hacer con él las operaciones aritméticas que sabemos hacer, pues una vez, digo, designada con X esa cantidad desconocida, debemos escribir algo, una relación en la que intervenga esa incógnita, esa X , los números dados y el signo igual para que se produzca un cierto equilibrio en las condiciones, respetando, por supuesto, los datos que se nos dan. En este ejemplo concreto, si X es la cantidad de dinero que metemos en la cuenta corriente, producirá $0.12X$ intereses, porque sabemos o nos dicen que la cuenta produce un 12%, es decir, 12 dividido por 100 multiplicado por X , o dicho de otra manera, en forma decimal, $0.12X$, esos serán los intereses que van a producir la cuenta.

Y sabemos, porque nos lo dice la noticia que nos dan, que esos intereses han de ser 90.000 pesetas. Entonces tenemos planteado ese equilibrio, ese balance. $0.12X$ tiene que ser igual a 90.000 pesetas.

Hemos planteado la ecuación, que es lo que hay que hacer con las ecuaciones. Entonces, en resumen, una ecuación es una igualdad que relaciona números con letras que representan normalmente cantidades desconocidas, que se suelen denominar incógnitas, y son las que se quieren hallar. En una ecuación contemplamos dos fases.

La primera fase, que es la fase de planteamiento de la ecuación. Y la segunda fase es la fase de resolución de la ecuación, es decir, de averiguar la incógnita. Sobre la primera fase, sobre el planteamiento de la ecuación, no hay mucho que decir.

Es una cuestión de experiencia, no hay mucho que decir en términos matemáticos. Es una cuestión de experiencia, es una cuestión de habilidad, es una cuestión, en definitiva, de cierta práctica. Y entonces, el estudio de las ecuaciones consiste fundamentalmente en encontrar procedimientos para, una vez planteada la ecuación, resolverla, despejar la incógnita, en definitiva.

Antes de hablar de las reglas para resolver las ecuaciones, podríamos ver cómo se clasifican. Sí, ecuaciones pueden considerarse de varios tipos. Por un lado, se puede atender al número de cantidades desconocidas que introducimos en la ecuación, o incógnitas, o letras.

Puede ser de una incógnita, de dos incógnitas, de tres incógnitas. Cuanto más sean las incógnitas, probablemente más difícil será de resolver la ecuación. Y la otra cosa que tiene

importancia en lo que se refiere a la dificultad para resolver una ecuación es lo que se denomina el grado de la ecuación.

El grado de la ecuación, aunque todavía no hemos hablado de exponentes, que se estudiará en el capítulo siguiente, pero el grado de una ecuación es el exponente mayor al que aparece elevado alguna incógnita de la ecuación. Por ejemplo, hablaremos de ecuaciones de primer grado si las incógnitas, por ejemplo, la x , no aparece multiplicada por otra incógnita. Es decir, no aparecen productos x por x , o dicho de otra manera, x elevado al cuadrado en la ecuación.

Solo aparecen las incógnitas multiplicadas por números. Aparecen, por ejemplo, expresiones como $4x$ o x más 5, pero no aparecen expresiones como x por x . O si tenemos dos incógnitas, pueden aparecer expresiones como x más y , pero no expresiones x por y . Esas son ecuaciones de primer grado o ecuaciones lineales que son las más sencillas de resolver. Cuando aparecen expresiones del tipo x por x o x al cuadrado o x por y , hablaremos de ecuaciones de segundo grado.

Si aparecieran expresiones del tipo x por x por x o x al cubo, hablaríamos de ecuaciones del tercer grado, que, lógicamente, son cada vez más difíciles de resolver. Y volviendo a las reglas para resolver ecuaciones, ¿cuáles son? Bueno, como he dicho antes, encontrar la solución de una ecuación o resolver una ecuación es encontrar precisamente esa cantidad incógnita, ese número, tal que, al sustituir las letras que aparecen en la ecuación por esos números, se cumple una identidad. Es decir, los dos miembros de la igualdad de la ecuación se convierten en el mismo resultado.

En general, para resolver una ecuación, lo que se puede decir es que conviene dejar todas las incógnitas, o en el caso de que solo haya una, en un lado de la igualdad y todos los números en el otro lado de la igualdad. En ese caso, la resolución de la ecuación ya es bastante sencilla, porque hablaremos ahora con alguna regla que comentaremos ahora, la ecuación se resuelve inmediatamente. Y eso se consigue mediante lo que se llama ir diseñando o construyendo o derivando ecuaciones equivalentes a las que tenemos de partida.

Es decir, mediante algunas reglas que ahora enunciaré, es posible ir construyendo una ecuación que sea equivalente. ¿Qué quiere decir? Que sus soluciones son las mismas que las de partida. Y que tenga un aspecto más fácil de resolver.

En esto consiste todo el misterio y todo el secreto de la resolución de ecuaciones. ¿Las reglas cuáles son? Pues podemos enunciar algunas de ellas. Por ejemplo, si sumamos o restamos a los dos miembros de la igualdad de la ecuación el mismo número, o una expresión en la que intervengan las incógnitas, se obtiene una ecuación equivalente.

Se obtiene una ecuación cuyas soluciones son las mismas que la ecuación de origen. Asimismo, si aplicando esta regla de una manera inteligente, podemos llegar a esta otra. Si pasamos un término de una ecuación, es decir, un número o una expresión literal con letras al otro miembro de la ecuación, al otro miembro de la igualdad, lo podemos hacer cambiándolo de

signo y obtenemos automáticamente una ecuación equivalente.

Y también podemos enunciar una tercera regla. Podemos multiplicar o dividir los dos miembros de la ecuación por un número distinto de cero, por el mismo número distinto de cero, y se obtiene también una ecuación equivalente. Con esta aplicación sistemática o repetida de este tipo de procedimientos, de este tipo de reglas, intentaremos, o se intenta, que es el secreto de resolver las ecuaciones, encontrar soluciones más sencillas, cuya solución sea aparente, se nos venga a los ojos.

Antes ya se ha explicado que es una ecuación lineal con una incógnita, pero ¿cómo se pueden resolver? Sí, las ecuaciones lineales con una incógnita es el tipo de ecuación más sencilla que nos podemos plantear. Una sola incógnita elevada como mucho a un exponente uno. Entonces, la aplicación repetida de las reglas que acabo de enunciar pueden conducir cualquier ecuación lineal a su forma normal.

La forma normal de una ecuación lineal llamando x a la incógnita y a y b a dos números cualesquiera, es la siguiente, es a por x igual a b . Esa es, digamos, la ecuación más elemental que se nos puede ocurrir. Esa ecuación es bastante sencilla de resolver. Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por el número inverso del a , es decir, por uno dividido por a uno partido por a , y entonces en un lado se nos cancela el a , por decirlo así.

Es decir, a dividido por a se queda uno, y entonces queda x en un lado de la ecuación y en el otro lado de la ecuación queda b dividido por a . Es decir, que la solución de la ecuación a por x igual a b , es que la forma normal de la ecuación lineal es la solución x igual a b partido por a . Si a es distinto de cero, no hay más que discutir. Esa es la solución y es un número fraccionario el número que es un numerador es b y su denominador a . Claro que el problema es si a es igual a cero, porque como hemos dicho antes, por cero no se puede dividir. Entonces hay que tener un poquito más de cuidado.

Si a es igual a cero, hay que distinguir los dos posibles valores que pueda tomar b , o las dos posibles situaciones que puede tener b . Que sea igual a cero, también, en cuyo caso cualquier número verifica esa ecuación, porque cero por cualquier número es igual a cero. Y si b es distinto de cero, entonces la ecuación no tiene solución, porque no hay ningún número x que multiplicado por cero, de un número distinto de cero. En resumen, la solución de la ecuación lineal a por x igual a b , es generalmente b partido por a , salvo que a sea distinto de cero.

En la que hay que distinguir los dos casos. b igual a cero tiene infinitas soluciones, cualquier número es solución de esa ecuación, o b distinto de cero, ninguna solución. No existe solución de esa ecuación.

Pues bien, debemos acabar nuestro programa. También diciendo que las ecuaciones, pues hay que hacer muchos ejercicios, ¿verdad? Y ahora es el tiempo. Deben ejercitarse, deben tener esta capacidad y esta rapidez de la que hablábamos, sobre todo para plantearlas en principio.

Bien, como he dicho, el planteamiento de una de las dificultades que suelen encontrar los que se acercan por primera vez al mundo de las ecuaciones, es el saber traducir en ese lenguaje esquemático de las matemáticas, de la suma, las multiplicaciones y las igualdades expresiones orales del lenguaje corriente. Digo que solo se puede recomendar una práctica, el haber visto varios ejemplos, el haber visto varias situaciones y el haber, en definitiva, hecho unos cuantos ejercicios. La resolución puede admitir ciertas técnicas más rutinarias, o métodos como se explican en la última pregunta de la lección 3, que son las técnicas de sustitución o de eliminación de variables, que son procedimientos más fáciles de comprender y de sistematizar para resolver ecuaciones.

Pues bien, debemos ya despedirnos. Diciéndoles que repasen las lecciones 4 y 5 que veremos en el próximo programa. Es conveniente que se las hayan leído y así las explicaciones les servirán de mayor provecho.

Bien, efectivamente, todavía nos queda hablar un poquito de los números para acabar esta parte de los números y ya, finalmente, en el próximo programa ya introduciremos algún tema nuevo como es el de geometría analítica. Solo vamos a despedirnos ahora de nuestros estudiantes que estarán ya acercándose a las vacaciones de Navidad y desearles unas buenas vacaciones y una feliz entrada al próximo año y darles una cita para el próximo mes de enero aquí en este programa de Matemáticas Básicas. Pues nos veremos el próximo año.

Muchas gracias. Despedimos ya así Matemáticas Básicas y también el curso de acceso. Despedimos por hoy la programación de la UNED.

Mañana volveremos a nuestra hora habitual y en esta misma emisora. Nuestro primer espacio será Revista de Economía. Continuaremos con Foro Político y Sociológico.

Después Revista de Filosofía y, por último, el curso de acceso. Gracias por su compañía y muy buenas noches. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org CC por Antarctica Films Argentina